Помилки в геометричних доведеннях і DG

Горох В.П.

Харківський державний педагогічний університет ім. Г.С.Сковороди
310 168 Харків, вул Блюхера, 2, ХДПУ
E-mail: Gorokh@rcnit.kharkov.ua

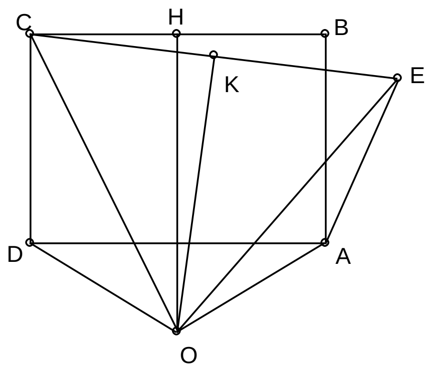
Софізми та математичні парадокси добре відомі любителям математики. Знайомство з ними сприяє розвитку критичного мислення, зацікавленості учнів до занять математикою. Проте інколи знайомство з софізмами може викликати і інші реакції. Учень в змозі зрозуміти "доведення" софізму, бачить абсурдність результату, але знайти помилку в міркуваннях виявляється для нього непосильною задачею. Це може викликати у нього зневіру у свої сили, а то і недовіру до математичних теорій: "А чи все у вашій математиці в порядку?". Звичайно автори популярних математичних книжок ніколи не залишають напризволяще читача із запропонованим софізмом. Як правило, завжди є можливість зазирнути у другу частину книжки і розібратися чому наведені "доведення" неправильні. Але значно корисніше розв'язати одну задачу самостійно, ніж розібратися у чужих розв'язуваннях десяти задач.

Що ж можна порадити читачу, коли геометрична задача виявилася для нього занадто складною? **Скористайтеся пакетом динамічної геометрії DG!** Ця порада може бути досить корисною при розгляді геометричних софізмів. Більшість таких софізмів спирається на використання неправильних малюнків. А саме це, використовуючи пакет DG, вияснити неважко. Звичайно, виконавши побудови в пакеті динамічної геометрії і побачивши, що конфігурація, яка використана при складанні софізму, неможлива, ми лише висуваємо гіпотезу. Але проведена експериментальна робота в пакеті DG дає нам впевненість в справедливості нашої гіпотези. Це звичайно полегшує пошуки її обгрунтування. Розглянемо на прикладах, як можна використати пакет динамічної геометрії при розгляді добре відомих геометричних софізмів та парадоксів.

Прямий кут дорівнює тупому

Наведемо “доведення” цього твердження із книги [1, с.89].

Нехай дано прямокутник *ABCD*. Відрізок *AE* лежить зовні прямокутника і дорівнює стороні *AB* або *CD*; він утворює гострий кут із стороною *AB*, як показано на *мал. 1*. Оскільки *CB* і *CE* не паралельні, їх серединні перпендикуляри *HO* і *KO* перетинаються в деякій точці *O*, яку ми з’єднаємо з точками *A*, *E*, *C*, *D*.



Мал. 1

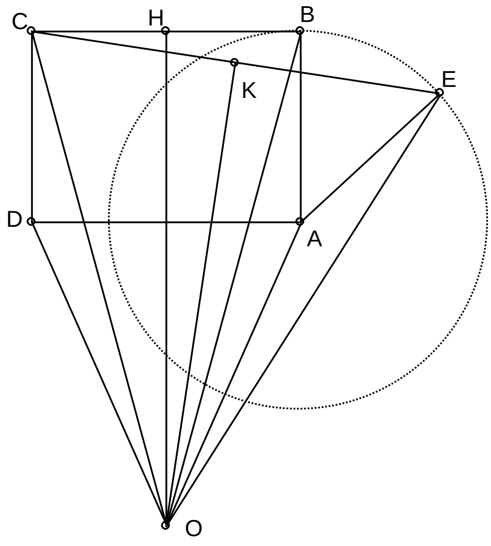
Трикутники *ODC* і *OAE*, очевидно, рівні. Дійсно, *OC* = *OE*, оскільки *KO* – серединний перпендикуляр відрізка *CE*; аналогічно *OD* = *OA*, так як *HO* – серединний перпендикуляр до *CB* і *DA*. Крім того, за побудовою *AE* = *DC*. Таким чином, три сторони трикутника *ODC* рівні відповідним сторонам трикутника *OAE*. Отже, за теоремою 8 книги I “Начал” Евкліда ці трикутники рівні, звідки випливає, що кут *ODC* дорівнює куту *OAE*.

Крім того, оскільки *HO* – серединний перпендикуляр до *DA*, кут *ODA* дорівнює куту *OAD*.

Отже, кут *ADC* (різниця кутів *ODC* і *ODA*) рівний куту *DAE* (різниці кутів *OAE* і *OAD*). Але кут *ADC* прямий, а кут *DAE* є тупим. Таким чином, ми довели те, чого не може бути.

Наведене вище “доведення” може поставити в тупик навіть добре підготовленого учня. Де ж помилка? Учень крок за кроком аналізує “доведення” і йому здається, що в ньому все обґрунтовано. Але ж отриманий результат неправильний! В цій ситуації неважко і розгубитися. І тут на допомогу може прийти пакет динамічної геометрії DG.

Спробуємо виконати малюнок, який використовують автори софізму, в пакеті DG (*Мал. 2*). Ми бачимо, що він суттєво відрізняється від малюнка, що був використаний при “доведенні” софізму: відрізки OB і OE лежать по різні боки прямої OA. В тому, що висунута гіпотеза справедлива, неважко переконатися, використовуючи динамічні властивості малюнка. На нашому малюнку точка E “прив’язана” до кола з центром в точці A та радіусом AB. Переміщуючи точку E за допомогою миші по колу, ми наочно переконуємося, що відрізки OB і OE лежать по різні боки прямої OA.



Мал. 2

Але як довести висунуту гіпотезу дедуктивно? Звичайно, тому хто має певні навички в знаходженні доведень геометричних тверджень зробити це неважко. Дійсно, $OB = OC$, оскільки OH – серединний перпендикуляр відрізка CB, а $OC = OE$, оскільки OK – серединний перпендикуляр відрізка CE. Отже, $OB = OE$, а тому точка O належить серединному перпендикуляру відрізка BE. Крім того, $AB = AE$, тому точка A також належить серединному перпендикуляру відрізка BE. Таким чином, пряма OA є серединний перпендикуляр відрізка BE. Звідси і випливає, що точки B і E лежать по різні боки прямої OA.

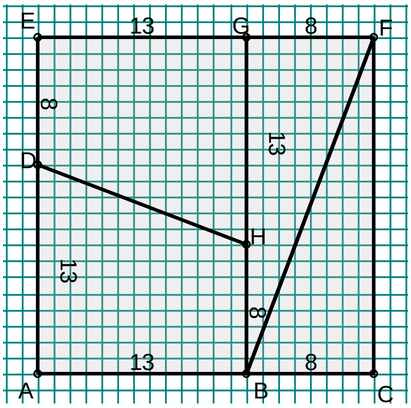
Зазначимо, що головна трудність при пошуку наведеного вище доведення полягає в тому, щоб висунути гіпотезу: пряма OA – серединний перпендикуляр відрізка BE. Але маючи динамічний малюнок, зробити це неважко.

Таким чином, автори софізму в своєму “доведенні” спираються на неправильний малюнок, що й приводить до абсурдного результату.

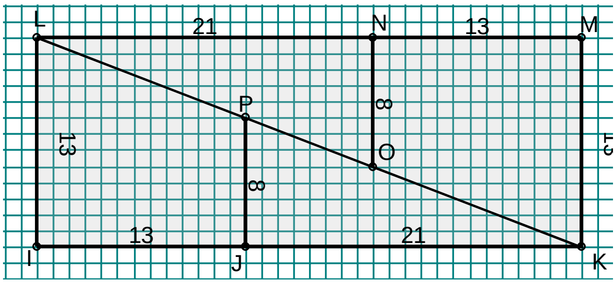
Зайва квадратна одиниця

Геометричні парадокси, пов’язані із зникненням площі при розрізанні многокутника на частини та побудові із них нового многокутника, розглядалися багатьма авторами [1–3]. Наведемо один із таких парадоксів [2, с.10].

Квадрат *AEFC*, площа якого 441 кв.одиниць розрізали на дві трапеції та два прямокутних трикутники (*мал. 3*). З одержаних фігур склали прямокутник *ILMK* (*мал. 4*), площа якого 442 кв. одиниці. Звідки взялася одна зайва квадратна одиниця?

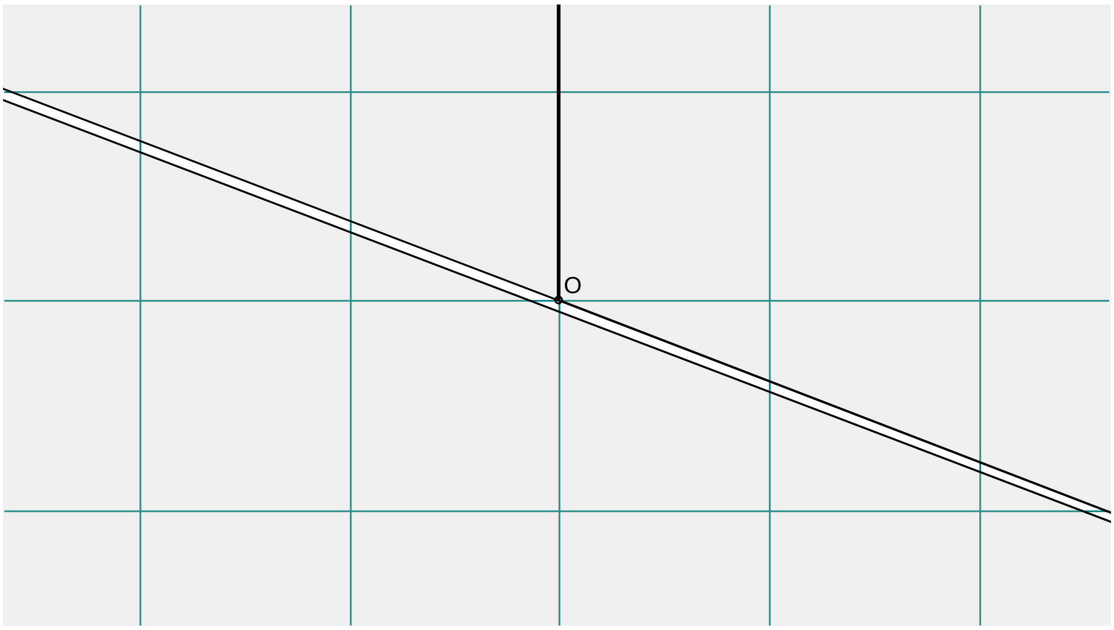


Мал. 3



Мал. 4

Виконавши відповідні побудови в пакеті DG, неважко з’ясувати, що прямокутник *ILMK* має дірку у вигляді паралелограма. Щоб побачити її треба значно збільшити масштаб зображення. На малюнку 5, зображена частина прямокутника з діркою.



Мал. 5

Тепер, після експериментів в пакеті DG, можна приступить до обгрунтування висунутих гіпотез. Залишимо цю роботу читачу.

Список літератури

1. Болл У., Коксетер Г. Математические эссе и развлечения. – М.: Мир, 1986. – 474 с.
2. Дубнов Я.С. Ошибки в геометрических доказательствах. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 68 с.
3. Конфорович А.Г. Математичні софізми і парадокси. – К.: Рад. школа, 1983. – 208 с.