Раков С.А.

Харківський державний педагогічний університет ім. Г.С.Сковороди
310 168 Харків, вул Блюхера, 2, ХДПУ
E-mail: Rakov@rcnit.kharkov.ua

Навчальні дослідження як моделювання професійної математичної діяльності та їх комп'ютерна підтримка (I)

Що таке навчальне дослідження з математики?
Поняття НДР та МНДР

Останні роки одну з головних тенденцій у навчанні математиці можна охарактеризувати як зростання інтересу та спроб наближення навчання математиці (з точки зору учня) до процесу професійної математичної діяльності. Найбільш цікавим у цьому напрямку є організація навчальних досліджень – НДР (learning explorations). Зразу треба зауважити, що відповідна термінологія ще не встановилася, і тому в літературі використовуються для позначення аналогічних підходів до навчання математиці такі терміни:

- Метод навчальних дослідницьких робіт (learning explorations method)
- Метод проектів (project approach method)
- Метод відкритих задач (open problems, open-ended problems method)
- Метод задач без запитань (problems without questions method)
- Метод варіативних задач (problem variations, what-if method)
- Метод життєвих задач (real-life problems method)
- Метод постановок задач (problem posing method)
- Метод проблемних областей (problem fields, problem sequences method)

Ще раз наголосимо, що всі ці терміни використовуються для позначення практично одного й того ж підходу, який надалі ми будемо називати методом навчальних дослідницьких робіт (МНДР), використовуючи цей термін як "парасольку" для усіх вищеназваних методів. Зауважимо, що назва кожного метода є досить інформативною та метафоричною, акцентуючи увагу на важливу, необхідну складову МНДР.

Прокоментуємо ці складові МНДР

МНДР природно організовувати у **формі проектів**, в яких можуть приймати участь декілька учнів, і які можуть продовжуватись кілька уроків, навіть цілий семестр і закінчуватись підготовкою звіту або реферату з можливим захистом.

Задачі, які пропонуються у рамках МНДР повинні мати **відкритий характер**, тобто припускати можливість уточнення, варіативність як в умовах, так і у висновках[1]. Задачі можуть бути **як суб'єктивно відкритими**, тобто деталі пропонованої постановки задачі та її твердження невідомі учневі, але відомі викладачеві, так і **об'єктивно відкритими**, коли викладачеві (або, навіть людству) розв'язок задачі частково невідомий. Як правило, послідовність виникаючих задач прямує до нерозв'язаних питань. Більш за те, обговорення відкритих задач **доцільно** доводити до нерозв'язаних проблем для того, щоб показувати діалектику розвитку знань та реальний "спосіб існування" математики. Однак, треба зауважити, що у відкритих задачах повинна бути міра відкритості, бо зовсім невизначений характер умови задачі не можна вважати задачею, а тільки побажанням займатися математикою.

Найбільш придатними для МНДР є задачі з досить або з абсолютно визначеною умовою, але з невизначеним висновком (частково невизначеним) або з висновком, про яке невідомо, справедливо воно чи ні. Такі задачі звуться **open ended problems** (задачі з невизначеним висновком). Зауважимо також, що термін **open ended problems** має ще одне важливе метафоричне значення: задача допускає багато модифікацій, які можна частково впорядкувати за степенем загальності, частина таких задач дійсно може представляти собою "відкриті проблеми" у загальноприйнятому розумінні – відповідь на них невідома не тільки учням (у контексті МНДР), але і взагалі, тобто вони представляють собою дійсно дослідницьку проблему. Цього не треба лякатися та запобігати, навпаки, така ситуація дійсно моделює життєву (real-life) ситуацію.

---

[1] Для структурних елементів задачі ми використовуємо термінологію структурних елементів теореми: *умова* та *висновок* (для їх позначення можна б було викорисовувати парні терміни *контест – проблема*, *предиетна область – твердження* та інші).В англомовній літературі прийняті терміни *starting situation – end situation*).

Зрозуміло, що open ended problems за формою є **задачами без запитань**, якщо в них абсолютно визначеною є умова задачі, і зовсім відсутній висновок. Висновок задачі треба відкрити учневі самостійно, а потім довести його або спростувати.

Варіативність задачі передбачає можливість змінювати, варіювати як умову, так і висновок задачі, тобто є формою відкритої задачі. Здебільшого варіативна задача є спеціальний випадок відкритої задачі, коли в умові або у висновку є параметр, або чітко виражена характеристика, яка може перебігати деяку природну множину значень і при різних значеннях якої отримуються різні задачі.

Життєвість задачі, перш за все, передбачає, що вона моделює життєву ситуацію у використанні математики, коли немає ніяких постановок задач, а їх постановка та формалізація становить невід'ємну складову творчого математичного процесу. Є тільки область досліджень, яка з тих чи інших умов є областю інтересів дослідника. Невід'ємною складовою життєвої задачі є її прикладний характер (життєва задача повинна бути особисто значимою для більшості учнів, як для учнів з математичною спрямованістю, так і для гуманітарною). Цю умову складно задовольнити, але такі шедеври популярної літератури, як книги Я.Перельмана, або Д.Дьюдні говорять про те, що це можливо. Кожна їх задача має походження з якоїсь цікавої задачі життя, після формалізації та викладення у абстрактній формі є цікавою та розрішимою з математичної точки зору і її розв'язок природно інтерпретується у термінах "життєвої" вихідної задачі. Як правило, розглянуті задачі є тільки інтродукцією до деякої природної області, яка ще мало досліджена і яка вабить до себе.

Метод постановок задач підкреслює ту сторону МНДР, що формалізація задачі, як говорить математичний фольклор, складає половину розв'язку задачі і творча робота математика передбачає постійну роботу (може напівсвідому, або підсвідому) над постановкою та перепостановкою проблеми: якщо не виходить доведення, або вдалося побудувати контрприклад – треба змінити умову, посилити її, щоб вона забороняла існування контрприкладу, давала можливість провести доказ. Яка характеристика контрприкладу є суттєвою, щоб після переформулювання умова залишалася досить широкою (пам’ятаємо, що потужність теореми складається з того, наскільки сильні висновки можна зробити при мінімальних умовах)? Може можна послабити висновок задачі, залишаючи її досить цікавою, і т.п.

Метод проблемних областей є формою існування методу постановок задач. Для постановки задачі треба, принаймні, описати проблемну область. Якщо проблемна область особисто значима для учня і містить у собі багато цікавого, загадкового, несподіваного для нього, допускає формалізацію на основі вже засвоєного математичного апарату – ця проблемна область може бути використаною для МНДР. У свою чергу, метод проблемних областей передбачає, як правило, можливість формулювати багато різних задач, як правило ці задачі утворюють послідовність, наприклад, узагальнень якоїсь однієї проблеми.

МНДР впроваджувався та досліджувався багатьма дослідниками та освітянами. Зокрема можна відмітити міжнародний проект “Open tasks in mathematics”, який проводився під егідою міністерств освіти Фінляндії та Німеччини у 1987-1992 роках [див. Use of open-ended problems in mathematics education, Research Report 176, Helsinki, 1997, 132р.]. У цій книзі можна знайти, мабуть, майже вичерпаний список літератури з цієї тематики станом на 1997 рік, який налічує понад 300 публікацій. МНДР сам є цікавою предметною областю дослідження, де значно більше запитань ніж відповідей, перелічимо деякі із них:

- *Тематика НДР з різних математичних дисциплін для різних типів навчальних закладів, для різних вікових груп, різних рівнів розвиненості учнів;*
- *Форми проведення НДР;*
- *Підготовка вчителів для проведення НДР.*
- *Підготовка навчальної та методичної літератури;*
- *Ефективність НДР. Позитивні та негативні особливості НДР;*
- *Комп’ютерна підтримка НДР.*

Кожне з наведених питань, є open-ended problem і, зрозуміло, завжди залишиться таким. Дана робота готувалася як ввідна у дану проблематику з ухилом на можливості комп'ютерної підтримки НДР. Оскільки кращим введенням у складні нові питання є розгляд виразних прикладів, то почнемо з прикладів НДР, які в силу обставин можна вважати модельними. Паралельно з обговоренням НДР розглянемо деякі питання можливості та доцільності їх комп'ютерної підтримки.

Приклади НДР

Наведемо спочатку два приклади НДР (у формі предметної області), які використовувалися у рамках зазначеного вище міжнародного проекту "Open tasks in mathematics education" у 7 класах загальноосвітніх шкіл Фінляндії та Германії у 1987 – 1992 р.р..

Приклад 1. Сірникові многокутники

За допомогою 12 сірників можна побудувати квадрат площею 9 au (au – спеціальна одиниця площі (au=**a**rea **u**nit), яка дорівнює площі квадрата із стороною в один сірник).

1. *Чи можна за допомогою 12 сірників побудувати многокутник площею 5 au?*
2. *Як багато різних многокутників площею 5 au можна побудувати за допомогою 12 сірників?*
3. *Чи можливо побудувати многокутник площею 6, 7, 8 au за допомогою 12 сірників?*
4. *Чи можливо побудувати многокутник площею 1, 2, 3, 4 au за допомогою 12 сірників?*
5. *Чи можливо побудувати многокутник площею більшою за 9 au за допомогою 12 сірників?*

Коментар до задачі

Задача, справді, складна, як вказує її автор та керівник зазначеного вище проекту. Її складність і краса визначається насамперед тим, що у ній сплетені арифметичні та геометричні питання.

Якщо додержуватися особливостей МНДР, які обговорювалися у попередньому параграфі, то дану НДР можна віднести до предметної області. Для того, щоб задача мала більш виразний дослідницький характер, можливо, доцільно було б додати деякі запитання, наприклад:

1. *Що можна взагалі сказати про величину площі многокутника, який утворений за допомогою 12 сірників?*
2. *Як зміняться задачі у випадку многокутника, який утворено за допомогою n сірників?*
3. *Як можна узагальнити задачу?*
4. *Які цікаві задачі виникли у Вас при розв'язуванні даної задачі?*

Подивимось на цю задачу ще з боку математичного аналізу. Її можна розглядати як частковий випадок ізопериметричної задачі, тому, найбільшу площу буде обмежувати 12-кутник із стороною 1, площа якого дорівнює $S(n,l)=\dfrac{nl^2\sin(2\pi/n)}{4\sin^2(\pi/n)}$ при n=12 та l=1.

Звідки отримуємо: $S(12,1)\approx 11.1961\ldots$.

Оскільки, площа многокутника неперервно залежить від координат його вершин, при неперервному “складанні многокутника у відрізок” його площа буде монотонно спадати від $S(12,1)$ до нуля, приймаючі усі проміжні значення, зокрема цілі значення 0, 1, 2, .. , 11 (за властивістю неперервних функцій, образом замкненого відрізка прямої при неперервному відображенні є замкнений відрізок прямої – теорема Вейєрштраса). Таким чином, існують 12-кутники із довжиною сторони 1, площа котрих дорівнює 0, 1, 2, .. , 11, причому інших цілочисельних значень площа приймати не може.

Нажаль, це рішення не є конструктивним – воно не дає жодних натяків на те, яким повинен бути многокутник з цілою площею. Зразу більш виразними встають питання: “А що значить – існує многокутник?”, “А що значить - побудувати многокутник?”. Побудувати за допомогою циркуля та лінійки? Чи можна використовувати якійсь допоміжні інструменти, наприклад транспортир, або лінійку з діленнями, або інструментарій комп'ютерної геометричної програми, наприклад, DG[2]? Чи можна вважати рішенням алгоритм побудови,

[2] DG – пакет динамічної геометрії, розроблений в ХДПУ ім. Г.С.Сковороди (керівник розробки – Раков С.А., програміст Осенков К.О.)

який забезпечує довільну наперед задану точність (тобто знайти наближений алгоритм розв’язку задачі)? Варіанти відповідей на ці запитання будуть породжувати зовсім різні предметні області, але у більшості випадків дослідження в цих предметних областях будуть виходити за рамки шкільної математики. Проте, усі ці запитання можуть обговорюватись у шкільній аудиторії, але на іншому рівні строгості і з іншими цілями. Ця конкретна задача дає можливість познайомити учнів з такими глибокими питаннями як:

5. *Алгоритмічна розрішимість задач.*
6. *Алгоритмічна розрішимість геометричних задач у різних класах допустимих інструментів (тобто познайомити з поняттям виконавців алгоритмів – скінчених автоматів), торкнутися питань конструювання автоматів.*
7. *Поняття про точні, наближені та евристичні алгоритми розв’язування задач.*
8. *Комп’ютер як універсальний виконавець алгоритмів.*
9. *Поняття неперервної функції та властивості функцій, неперервних на відрізку.*
10. *Дві вітки сучасної математики: інтуїціонізм та конструктивізм.*

Зрозуміло, що знайомство учнів з цими складними питаннями буде з необхідністю значною мірою поверховим, але воно буде утворювати важливий

Рисунок 1

шар розуміння цих понять на інтуїтивному рівні, тому що воно виникло на основі дослідження (НДР!) конкретної, зрозумілої та наглядної геометричної задачі і творчого процесу пошуку її розв'язку.

Як бачимо, глибоке обговорення цієї НДР неможливо без обговорення питань, пов'язаних з використанням ІТ, більш за те, ці питання складають ізюминку цієї задачі. А чи можна зробити комп'ютерну підтримку для виконання цієї НДР?

Без сумніву, можна – на Рисунку 1 представлено копію екрана з зображенням динамічного креслення для дослідження шарнірних 12-кутників засобами пакета DG, засобами цього пакета легко побудувати шарнірний 12-кутник із стороною 1, та відобразити на екран площу, яку він обмежує. Перетягуючи динамічно (динамічна геометрія!) вершини 12-кутника можна стежити за величиною його площі. Зауважимо, що чаклунства не буває – проблеми пов'язані з пошуком конструктивних розв'язків залишаються: графічний екран є дискретним (растровим!), тому можливе розміщення вершин 12-кутника тільки у вузлах растрової сітки і т. д. і т. п. Що цікаве – теорема Вейєрштраса і тут може бути у нагоді як для доведення (нажаль, неконструктивного) існування шуканих 12-кутників, так і для наближеного їх знаходження, наприклад методом дихотомії.

Приклад 2. Числові трикутники

Вихідною позицією для цієї проблемної області є поняття числового трикутника з вільними вершинами:

Дано трикутник з вільними вершинами, на сторонах котрого розташовані деякі числа.

Низка задач відносно цього трикутника може бути такою:

1. *Які числа повинні бути розміщені у порожніх колах, щоб суми трьох чисел, розміщених вздовж усіх сторін трикутника співпадали?*
2. *Чи існує інший розв'язок задачі?*

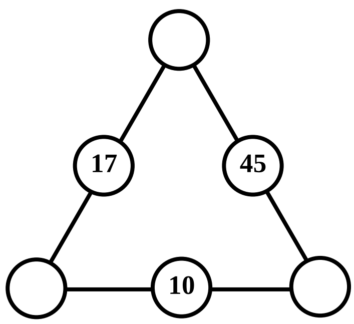

Рисунок ~~1~~2

3. *Скільки різних розв'язків має задача?*
4. *Чи існує розв'язок, в якому є від'ємні числа (одне, два, три)?*
5. *Чи існує розв'язок, для котрого суми вздовж сторін дорівнюють 80?*
6. *Чи існує розв'язок, для котрого суми вздовж сторін дорівнюють 81?*
7. *Які числа можуть бути сумою чисел вздовж сторін трикутника?*
8. *Як можна узагальнити цю задачу?*

Результати експериментів із задачею "Числові трикутники"

Нагадаємо, що приклади двох перши досліджень (у вигляді предметних областей) взято з опису міжнародного Фінсько-Німецького експерименту з "Open tasks in mathematics" 1987-1992 р.р. От як коментує результати експериментів з цією задачню один із організаторов та виконавців цього проекту проф. E.Pehkonen (вчительський факультет Хельсінкського університету).

"Наприкінці 1987 року я експериментував з використанням "чисельних трикутників" як окремою задачею у одному 7 класі м. Хельсінкі. Моєю вихідною метою було поліпшення у учнів усних обчислювальних навичок у неординарній формі, а також навичок розв'язування нестандартних задач (problem solving skills). Числові трикутники ведуть до низки цікавих задач (проблемної області) ... у контексті розв'язування яких учні тренувалися у виконанні арифметичних дій з від'ємними числами на протязі кількох тижнів. Всього цієї проблемної області торкалися на протязі шістьох уроків, але завжди тільки на частині уроку. Весь клас був у захваті від знаходження рішень як окремих задач, так і від пошуку загальних підходів до розв'язування. Деякі учні розказували мені нові розв'язки при зустрічі поза класом. Якщо на протязі кількох уроків ми не торкалися цієї задачі, учні питали, коли ж буде можливість показати мені розв'язки, відкриті ними вдома."

Коментар до задачі "Числові трикутники"

Для проекту, мабуть, ідеальною могла б бути задача, яка має усі характеристики НДР, обговорені вище (але, зрозуміло, така задача є дуже вдалою знахідкою). Здається, даній задачі бракує тільки "життєвість" (real-life problem) - її, скоріше, можна віднести до класу розважальних задач (puzzles). Але хто сказав, що розваги не є життєвими?

У контексті даної роботи уявляються цікавими міркування, наскільки ефективним може бути використання комп'ютерних програм при проведенні НДР. Наведемо листинг варіанту роботи у середовищі пакету Derive (або шкільного графічного калькулятора TI-92) у рамках НДР "Числові трикутники".

Оголосимо функцію **SOLUTION(s)**, *яка повертає розв'язок задачі, що відповідає сумі* **s** *чисел, розташованих вздовж сторін заданого трикутника:*

#1: SOLUTION(s) := SOLVE([x + y + 10 = s, y + z + 45 = s, x + z + 17 = s], [x, y, z])

Розв'яжемо задачу для **s=80***:*

#2: SOLUTION(80)

#3: [x = 49 y = 21 z = 14]

Розв'яжемо задачу для **s=81***:*

#4: SOLUTION(81)

#5: [x = 49.5 y = 21.5 z = 14.5]

Оголосимо функцію **SOLUTION_GENERAL(a, b, c)***, яка повертає загальний розв'язок задачі (коли величина суми вздовж сторін трикутника невизначено):*

#6: SOLUTION_GENERAL(a, b, c) :=
SOLVE([x + y + a = y + z + b, y + z + b = z + x + c, z + x + c = x + y + a], [x, y, z])

Розв'яжемо задачу у загальному вигляді (коли параметри **a, b, c** *не конкретизовані):*

#7: SOLUTION_GENERAL(a, b, c)

#7: [x = @1 y = @1 - b + c z = @1 + a - b]

Параметр **@1** *є вільним – замість нього можна підставляти довільні числа.*

Оголосимо функцію **SOLUTION_GENERAL_WITH_GIVEN_SUM(a, b, c, s),** *яка повертає загальний розв'язок задачі (коли величина суми вздовж сторін трикутника визначена і дорівнює* **s***):*

#8: SOLUTION_GENERAL_WITH_GIVEN_SUM(a, b, c, s) :=
SOLVE([x + y + a = s, y + z + b = s, z + x + c = s], [x, y, z])

Розв'яжемо задачу з різноманітними типами даних:

#9: SOLUTION_GENERAL_WITH_GIVEN_SUM(1, -2, √3, 1.7)

#10: $\left[x = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{13}{20}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{20}, \quad z = \frac{47}{20} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

Зрозуміло, що для такої роботи учні повинні досить вільно обходитись з відповідною програмою. Було б цікавим провести такий експеримент, наприклад, в Австрії, де кожний учень має можливість використовувати TI-92 у довільній обстановці, вдома або в школі (кожному учню видається у розпорядження TI-92 поряд з підручниками). Ще б цікавіше було б провести такі експерименти на Україні, для чого організувати декілька “пілотних класів” з питань впровадження IT у навчальний процес з математики.

Приклад 3. Магічні многокутники

Як показує аналіз літератури з використання МНДР у навчанні математиці, однією з великих проблем є методика їх проведення та їх місце у навчальному процесі. Одним із дійсно продуктивних методів та місць використання МНДР можуть бути олімпіади з математики. Здається, явно або ні, все більше задач олімпіад можна віднести до класу НДР або open-ended problems. Розробка спеціальних програм для підтримки МНДР у навчанні математиці засобами IT може складати предмет задач для олімпіад з інформатики. У контексті даної роботи найбільш цікавими для нас такі задачі з точки зору їх відповідності НДР з математики і ефективності підтримки їх засобами IT. Автор на протязі багатьох років очолює журі Харківської обласної олімпіади школярів з інформатики та Всеукраїнської олімпіади студентів з інформатики. Більшість задач, пропонованих на олімпіадах 1987-1999 років було підготовлено якраз у цьому дусі і зараз ми наведемо приклад однієї задачі, котра у значній мірі корелює з задачею про числові трикутники. Наведемо копію подання цієї задачі на олімпіаді.

ХАРКІВСЬКА ОБЛАСНА ОЛІМПІАДА ШКОЛЯРІВ З ІНФОРМАТИКИ

1995 рік *(Теоретичний тур)*

Задача "Магічні многокутники" *(автор Раков А.Ф.)*

1.Числа 1,2,3,4,5,6 розмістіть у вершинах и серединах сторін трикутника так, щоб суми чисел, які розташовані вздовж сторін трикутника, були рівні між собою.

("Математика", підручник для учнів 1 класу)

2.**Сформулювати узагальнення задачі на випадок довільних N-кутників**. Ввести поняття магічного N-кутника, його магічної константи, а також його порядку.

3.**Розробити програми для дослідження магічних многоугокутників:**

3.1. генерації магічного N-кутника (хоча б одного) для довільного непарного порядку N;

3.2. генерації магічного N-кутника (хоча б одного) для довільного парного порядку N;

3.3. генерації усіх магічних N-кутників для довільного парного порядку N;

3.4. генерації усіх магічних N-кутників для довільного порядку N

4. **Знайти інтерпретацію для задачі про магічні многокутники,** тобто реальну, уявну або фантастичну ситуацію, для опису якої було б зручно скористатися магічними многокутниками.

Коментар до задачі

Розв'язування цієї задачі демонструє дійсний симбіоз людини та комп'ютера при розв'язуванні математичних задач. Комп'ютерні експерименти з генерацією усіх магічних многокутників для невеликих N<=10 дозволяють підмічати закономірності, які без комп'ютера знайти досить важко (навіть для

N=4 це вже досить складна задача). Потім ці закономірності можна доводити до алгоритмів і знов, програмуючі знайдені алгоритми, мати змогу розв'язувати задачу для довільної розмірності автоматично.

Задача складна, для непарних многокутників існує досить прозорий алгоритм їх побудови, а у випадку парних многокутників знайдені спеціальні, досить винахідливі алгоритми (*автор Раков А.Х.*) для N=4k, 12k+2, 12k+6, 12k+10, які покривають усю множину парних многокутників.

Задача про магічні многокутники (точніше, ця предметна область) використовувалася у 1995 році при підготовці команди України на Всесвітню олімпіаду з математики і викликала велику зацікавленість учнів.

У наступних публікаціях ми продовжимо розгляд питань, пов'язаних з розглядом прикладів навчальних досліджень при вивченні математики, можливостей їх комп'ютерної підтримки, а також форми впровадження навчальних досліджень у практику середньої школи.