**В.А Крекнін**
м. Херсон

# Методичні особливості використання середовища розв'язування (СРЗ) у програмно-методичному комплексі (ПМК) "Term"

Забезпечення підтримки професійної математичної діяльності здійснюється за допомогою відомих систем комп'ютерної алгебри (або математичних систем). Їх використання надає фахівцям з теоретичної та прикладної математики можливості розв'язування широкого спектру математичних задач. Однак, діяльність, що спрямована на засвоєння навчальних курсів математики, має певну специфіку. Математична практична діяльність учня полягає в розв'язуванні математичних задач. Тому головна мета системи шкільної освіти полягає у тому, щоб навчити учнів самостійно будувати хід розв'язування математичної задачі. Застосування інформаційних технологій надає багато додаткових можливостей для досягнення цієї мети. Саме таке призначення має система "Term". Вона забезпечує комп'ютерну підтримку практичних занять і лабораторних робіт з математики, тобто є засобом, який сприяє активній математичній діяльності користувача (учня, студента). В роботі [1] розглянуто структуру ПМК Терм VII та призначення її окремих програмних модулів. Ці засоби у розширеній версії дозволяють розв'язувати всі стандартні типи задач, які передбачаються програмою з математики загальноосвітньої школи для VII, VIII і IX класів.

Процес розв'язування математичної задачі складається з послідовності кроків, на кожному з яких користувач виконує деяке перетворення математичного об'єкта – моделі математичної задачі. Середовище розв'язування (задач) є одним з найважливіших програмних модулів ПМК "Term". Основні функції цього модуля – перевірка правильності перетворень, виконаних користувачем, або автоматичне виконання перетворення за командою користувача. Список припустимих перетворень надано у модулі *Довідник*, звідки користувач на кожному кроці обирає потрібне перетворення. Відкривши СРЗ, користувач має вибрати одну із задач Задачника або скористуватися командою Задача/Нова задача. Після введення умови задачі користувач має вибрати один з режимів розв'язування: або автоматичний режим, або режим перевірки кроку розв'язування, або змішаний режим. Розв'язуючи задачу в автоматичному режимі, користувач вибирає з Довідника те перетворення, яке він хоче виконати, а комп'ютер виконує це перетворення.

Процес розв'язування задачі користувач здійснює за допомогою Довідника та математичного редактора. Надамо опис основних засобів СРЗ, які відповідають головним розділам «Довідника».

Для перетворення виразів, до яких не входять змінні, в «Середовищі розв'язування» передбачається використання різних форм запису чисел і перехід від однієї із цих форм до іншої. Так раціональне число можна записати у вигляді звичайного або мішаного дробу та десяткового дробу (скінченного, або періодичного). Для переходу від однієї форми до іншої необхідно виділити число, вибрати потрібну дію й натиснути кнопку «Виконати» у відповідному розділі довідника. Крім того, користувач може перетворити запис числа в стандартну форму, тобто скоротити звичайний дріб, або скоротити дробову частину мішаного дробу. Для виконання деяких перетворень раціональних виразів, зокрема степеневих, необхідно подати задане число у вигляді суми (різниці), добутку, або відношення двох чисел. У відповідному розділі довідника надано довідки, за допомогою яких можна здійснювати будь-яке з цих представлень. Крім того, є можливість записати число у вигляді степеня. Таке подання необхідно зробити наприклад для того, щоб використати формулу скороченого множення $a^2 - 3^2 = (a-3)\cdot(a+3)$ при розкладанні на множники виразу $a^2 - 9$.

Оскільки у програмі математики 8-го класу загальноосвітньої школи є розділ «Квадратні корені», то довідник «Середовища розв'язування» для 8-го класу навчання має довідки, що стосуються відповідних перетворень. Так довідка «Добути квадратний корінь» надає можливість знаходити такі корені з раціональних чисел, які є точними квадратами. За допомогою цієї довідки можна також виносити чисельні множники з під знака квадратного кореня, якщо підкореневе число є натуральним. Інші довідки можна використати для внесення числа під знак квадратного кореня та для звільнення від ірраціональності у знаменнику. Наприклад число $9$ можна представити у вигляді $\sqrt{9^2}$, а число $5\cdot\sqrt{3}$ - у вигляді $\sqrt{5^2\cdot 3}$. У довідковому розділі, який стосується чисел, є також довідка для знаходження модуля числа.

Щоб полегшити здійснювання перетворень виразів зі змінними, довідник містить довідки, які стосуються заміни виразу змінною: «Позначити вираз змінною», «Підставити вираз замість змінної» та «Надати змінній значення». Наприклад, нехай треба обчислити $3\cdot(2\cdot a - 3\cdot b + 5) - 6$, якщо $M(a;b)$ – довільна точка прямої $2\cdot x - 3\cdot y = 4$. У полі «Середовища розв'язування» відмітимо двочлен $2\cdot a - 3\cdot b$, після чого натиснемо на кнопку «Виконати» у довідці «Позначити вираз змінною». Відкриється вікно «Додатковий вираз», в якому буде записано $2\cdot a - 3\cdot b =$. Після знака рівності поставимо літеру $"z"$, тобто позначимо цей вираз через $z$; потім натиснемо клавішу «Виконати». У робочому полі «Середовища розв'язування» отримаємо запис: $\begin{cases} 3\cdot(z+5) - 6 \\ z = 2\cdot a - 3\cdot b \end{cases}$. Потім відмітимо змінну $z$ й натиснемо кнопку «Виконати» у довідці «Надати змінній значення». У вікні

«Додаткового виразу» запишемо $z = 4$ і натиснемо кнопку «Виконати». У робочому полі «Середовища розв'язування» отримаємо запис $\begin{cases} 3\cdot(z+5)-6 \\ z = 2\cdot x - 3\cdot y \\ z = 4 \end{cases}$. З рівності $z = 4$ значок змінної z мишкою перетягнемо на літеру z у виразі $3\cdot(z+5)-6$, який буде перетворено на числовий вираз $3\cdot(4+5)-6$. Після чого залишається двічі клацнути лівою клавішею мишки на знаках арифметичних дій у порядку їх виконання. Для заміни змінної її виразом можна також перетягнути мишкою значок змінної, яким позначено цей вираз, на змінну, яку треба замінити, або двічі клацнути лівою клавішею на змінній, що перетворюється на вираз.

Для виконання перетворень виразів зі змінними зручно користуватися довідкою «Заміна рівних» у довіднику «Вирази». Нехай нам необхідно записати деякий вираз в іншому вигляді, наприклад результат обчислень, скорочення дробів та інше, що ми можемо виконати усно. Для цього необхідно відмітити цей вираз й натиснути кнопку «Виконати» у довідку «Заміна рівних». У вікні «Додаткового виразу», що при цьому відкриється, треба записати перетворену форму розглянутого виразу та натиснути кнопку «Виконати». Якщо перетворення було зроблено без помилки, у робочому полі з'явиться перетворений вираз. Для введення результату перетворень можна використовувати панель редактора.

Розглянемо довідки із розділу «Вирази». У підрозділі «Сполучні закони» надаються довідки, за допомогою яких можна здійснювати групування, або розгрупування доданків та співмножників. Наприклад, якщо потрібно згрупувати множники $a\cdot b$ у виразі $a\cdot b\cdot c$, то необхідно виділити вираз $a\cdot b$ і натиснути клавішу «Виконати» у довіднику «Згрупувати співмножники». Довідка із підрозділу «Переміщувальні закони» надає можливість переставляти доданки та співмножники. Наприклад вираз $a-b$ можна за допомогою цієї довідки перетворити на $-b+a$. У підрозділі «Спрощення» передбачається довідка заміни ділення множенням. Наприклад, складний дріб $\dfrac{A}{\left(\dfrac{b}{c}\right)}$ можна замінити на вираз $A\cdot\dfrac{c}{b}$. Інші довідки з цього підрозділу стосуються найпростіших перетворень типу $-(-A) = A; (-1)\cdot A = -A; A+(-B) = A-B$ та ін. Підрозділ «Розподільчий закон» містить довідки, які дозволяють проводити операції розкриття дужок, винесення за дужки та зведення подібних членів. Для винесення за дужки деякого множника необхідно виділити цей множник у наявному вигляді, а інший множник треба представити у згрупованому вигляді, якщо виникне така потреба. Нехай дано вираз $y^3 - 6 \cdot x \cdot y$. Щоб винести за дужки $y$, представимо $y^3$ як $y^2 \cdot y$, а у доданку $6 \cdot x \cdot y$ згрупуємо множник $6 \cdot x$, після чого одержимо вираз $y^2 \cdot y - (6 \cdot x) \cdot y$. Залишається виділити цей вираз і натиснути кнопку «Виконати» у довідці «Винести за дужки». Дуже важливим є підрозділ «Раціональні вирази». Покажемо на прикладі, як користуватися довідкою «Скоротити дріб». Нехай треба скоротити дріб $\frac{12 \cdot a^2 \cdot b}{2 \cdot a \cdot b}$. Представимо за допомогою довідки «Заміна рівних» число $12$ як добуток $2 \cdot 6$, а вираз $a^2$ у вигляді $a \cdot a$. Після цього підведемо вказівник мишки на дробову риску отриманого дробу, відмітимо цю дріб і натиснемо кнопку «Виконати» у довідці «Скоротити дріб». Отже для скорочення дробу необхідно виділити окремо у чисельнику і знаменнику цього дробу співмножник, на який можна скоротити дріб.

Розглянемо тепер, як виконуються дії додавання і віднімання алгебраїчних дробів. Тут можливі три випадки: дроби мають рівні знаменники; дробі мають різні знаменники, причому їх знаменники не містять спільних співмножників; знаменники дробів є різними, але вони мають спільні співмножники. У перших двох випадках можна безпосередньо використати довідку «Додати два дроби», або «Відняти два дроби». Слід підкреслити, що в обох довідках передбачаються два можливих варіанти: дроби мають різні знаменники, та дроби мають однакові знаменники. Для виконання відповідної операції необхідно вибрати один із цих варіантів. Так само здійснюється додавання і віднімання двох виразів, з яких один є дробом, а інший – цілим виразом. Якщо знаменники дробів різні, але мають спільні співмножники, то спочатку треба звести ці дроби до спільного знаменника. Це можна зробити за допомогою довідки «Помножити чисельник та знаменник дробу на вираз». Після зведення дробів до спільного знаменника відповідні дії виконуються як у випадку дробів з рівними знаменниками. В підрозділі «Раціональні вирази» є також довідки «Помножити дроби» та «Поділити дроби». У другій з цих довідок передбачається випадок, коли дроби мають рівні знаменники.

Довідник розділу «Степені» містить три підрозділи. Перший підрозділ стосується загальних перетворень степенів. Довідки цього підрозділу дозволяють здійснювати операції зі степенями, які мають одну і ту ж основу. Розглянемо приклад: піднести до степеня $(a^5)^3$. Для розв'язування задачі виділимо заданий вираз, виберемо одну з передбачених дій, а саме $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ у довідці «Застосувати перетворення степеня» і натиснемо кнопку «Виконати». Можна виконати і обернене перетворення. Нехай задано вираз $x^{12}$. Подамо цей вираз у вигляді степеня з основою

$x^4$. З цією метою виділимо степінь $x^{12}$ та за допомогою довідки «Заміна рівних» запишемо цю степінь у вигляді $(x^4)^3$. Можна зробити це перетворення інакше. Використаємо довідник з розділу чисел і представимо показник $12$ у вигляді $4\cdot 3$. Потім виділимо отриманий степінь $x^{4\cdot 3}$, виберемо потрібну дію у довідці «Застосувати перетворення степеня» і натиснемо кнопку «Виконати». Після цього одержимо вираз $(x^4)^3$.

Підрозділ «Формули скороченого множення» надає можливість виконувати перетворення за допомогою згаданих формул. Наприклад, нехай треба розкласти вираз $x^6+8$ на множники. Подано степінь $x^6$ у вигляді $x^2\ {}^3$. Потім необхідно подати число 8 у вигляді $2^3$. Далі виділимо вираз $x^2\ {}^3-2^3$ і натиснемо кнопку «Виконати» у довідці «Сума (різниця) кубів». В результаті одержимо потрібний розклад на множники: $x^2+2\ \cdot\ x^2\ {}^2-2\cdot x^2+2^2$. Залишається перетворити $x^2\ {}^2$ на $x^4$.

Розглянемо приклад на застосування оберненого перетворення: подати вираз $a^2+10\cdot a+25$ у вигляді квадрата суми. З цією метою запишемо доданок $10\cdot a$ у вигляді $2\cdot 5\cdot a$ і число $25$ як $5^2$. Потім виділимо вираз $a^2+2\cdot 5\cdot a+5^2$ і натиснемо кнопку «Виконати» у довідці «Квадрат суми (різниця)». Буде отримано вираз: $a+5\ {}^2$. У розділі «Степені» є також підрозділ «Перетворення квадратних коренів». Довідка «Основна властивість квадратного кореня» дозволяє заміняти один на один члени рівностей $\sqrt{A}\ {}^2=A$ та $\sqrt{A^2}=|A|$. У цьому підрозділі є також довідка «Перетворення виразів під знаком квадратного кореня», яка дозволяє використати формули типу: $\sqrt{A\cdot B}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$, $\sqrt{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ (за умови $A\geq 0$) та ін.

**Розділ «Рівняння».** Багато можливостей для розв’язування рівнянь надає довідковий розділ «Рівняння». Перший підрозділ «Рівносильні перетворення рівнянь» передбачає заміну рівняння виду $F(x)\cdot G(x)=0$ на сукупність рівнянь: $\left[\begin{array}{l}F(x)=0;\\ G(x)=0.\end{array}\right.$ Підрозділ «Рівняння з модулями» дозволяє звільнитися від модуля та замінити такі рівняння на сукупності рівнянь без модулів. За допомогою довідки «Розв’язати раціональне рівняння» у відповідному підрозділі можна рівняння $\frac{F(x)}{G(x)} = a$ замінити на сукупність $\begin{cases} F(x) = a \cdot G(x); \\ G(x) \neq 0. \end{cases}$ Після того, як будуть знайдені корені рівняння $F(x) = a \cdot G(x)$, можна виключити ті з цих коренів, які є нулями знаменника $G(x)$. Останню дію можна виконати за допомогою довідки «Видалити розв'язки, які не задовольняють умові-нерівності».

Розглянемо наступний розділ Довідника – «Квадратні рівняння». За допомогою довідки «Розв'язати найпростіше квадратне рівняння» можна знайти розв'язки рівнянь виду $x^2 = a$, у кожному з випадків: $a > 0, a < 0, a = 0$. Якщо у рівнянні $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ коефіцієнт $b \neq 0$, то для його розв'язування необхідно використати довідку «Обчислити дискримінант квадратного рівняння». Довідка «Розв'язати квадратне рівняння за методом дискримінанту» надає можливість зробити висновок про кількість коренів у кожному з варіантів: $D > 0, D = 0, D < 0$ та знайти ці корені, якщо вони існують. При розв'язуванні задач геометричного або фізичного змісту, як правило, від'ємні корені квадратного рівняння не задовольняють умову. З метою їх виключення передбачено довідка «Виділити додатні розв'язки рівняння». Після натискання кнопки «Виконати» у цій довідці залишаються тільки додатні корені. У підрозділі «Рівняння з радикалами» довідка «Розв'язати найпростіше рівняння з радикалом» дозволяє проаналізувати рівняння $\sqrt{x} = a$ у випадках $a > 0, a = 0, a < 0$ і знайти його розв'язок, якщо він існує. Довідка «Розв'язати рівняння стандартного виду з радикалами» надає можливість перетворити рівняння $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ та $\sqrt{f(x)} = g(x)$ відповідно в системи $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$ та $\begin{cases} f(x) = g^2(x); \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ Застосування довідок з підрозділу «Представлення розв'язків рівнянь» розглянуто вище.

Довідковий розділ «Нерівності» для 9-го класу навчання складається з кількох підрозділів. Підрозділ «Логічні значення числових нерівностей» дозволяє перевіряти правильність вказаних нерівностей. Підрозділ «Основні властивості нерівностей» має такі довідки: «Додати вираз до обох частин нерівності», «Перенести доданок в іншу частину нерівності», «Поміняти місцями частини нерівності». Крім того, є довідка «Помножити нерівність на число», в якій необхідно спочатку зафіксувати знак вибраного множника. Головним тут є підрозділ «Розв'язування нерівностей».

Перша довідка цього розділу стосується лінійних рівнянь, при розв’язуванні яких треба враховувати знак коефіцієнта при невідомому. Довідка «Розв’язати найпростішу лінійну нерівність» виду $x > a\ (x \ge a); x < a\ (x \le a)$ дозволяє записати множину розв’язків будь-якої з цих нерівностей у вигляді відповідного числового проміжку. При розв’язуванні квадратної нерівності необхідно скласти квадратне рівняння, відповідне нерівності. Це можна здійснювати за допомогою довідки з такою ж назвою. При цьому імена змінних у нерівності і у відповідному рівнянні не можуть бути однаковими. Знаходження множини розв’язків квадратної нерівності можна виконати за допомогою довідки «Обрати формулу розв’язування». З цією метою необхідно вибрати відповідний випадок, враховуючи знаки дискримінанта та першого коефіцієнта, і натиснути кнопку «Виконати» у розглянутій довідці. Довідка «Зобразити числовий проміжок» надає можливість відмітити на числовій осі проміжок, що задається формулою типу $x \in (a;b); x \in [a;b]; x \in (-\infty;c]$.

Підрозділ «Перетворення алгебраїчних нерівностей» надає можливість за допомогою довідки «Перетворити нерівність-добуток» замінити нерівність типу $A \cdot B \ge 0$ $(A \cdot B > 0); A \cdot B \le 0\ (A \cdot B < 0)$ на сукупність систем нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \ge 0 \\ B \ge 0 \end{cases}, \\ \begin{cases} A \le 0 \\ B \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

кожна з яких є простішою ніж задана. Довідка «Перетворити нерівність-частку» дозволяє зробити аналогічне перетворення нерівностей типу $\frac{A}{B} \ge 0$. Розглянемо довідку «Перетворити нерівність зі степенями». Вона дозволяє здійснювати такі заміни: нерівність $A^{2\cdot k} < B^{2\cdot k}$ можна замінити на $A^2 < B^2$; нерівність $A^{2\cdot k+1} < B^{2\cdot k+1}$ - на $A < B$; $A^2 < 0$ - на $False$; $A^2 \le 0$ - на рівність $A = 0$; $A^2 > 0$ - на сукупність $\left[\begin{array}{l} A > 0 \\ A < 0 \end{array}\right.$; $A^2 \ge 0$ - на $True$. За допомогою довідки «Перетворити нерівність з радикалом» можна здійснювати такі заміни: нерівність $\sqrt{A} < B$ можна замінити системою $\begin{cases} B \ge 0 \\ A \ge 0 \\ A < B^2 \end{cases}$; нерівність $\sqrt{A} > B$ - на сукупність $\left[\begin{array}{l} B \le 0 \\ A > B^2 \end{array}\right.$. Довідка «Перетворити нерівність з модулем» надає можливість звести такі нерівності до систем або сукупностей нерівностей без модуля: нерівність $|A| < B$ перетворюється на систему $\begin{cases} A > -B \\ A < B \end{cases}$; нерівність $|A| > B$ - на сукупність $\left[\begin{array}{l} A > B \\ A < -B \end{array}\right.$.

**Розділ «Системи».** Довідковий розділ «Системи» є необхідним для розв'язування як систем рівнянь, так і систем нерівностей. Підрозділ «Алгебраїчні перетворення систем рівнянь» містить довідки, за допомогою яких можна виконувати основні перетворення вказаних об'єктів. Довідка «Множення рівняння на число» надає можливість перейти від системи рівнянь $\begin{cases} F_1 = G_1 \\ F_2 = G_2 \end{cases}$ до системи $\begin{cases} a \cdot F_1 = a \cdot G_1 \\ F_2 = G_2 \end{cases}$, де $a$ - будь-яке дійсне число, $a \neq 0$. Довідка «Елементарне перетворення рівнянь» дозволяє замінити систему рівнянь $\begin{cases} F_1 = G_1 \\ F_2 = G_2 \end{cases}$ на систему $\begin{cases} F_1 + a \cdot F_2 = G_1 + a \cdot G_2 \\ F_2 = G_2 \end{cases}$, де $a$ - довільне дійсне число. Частинний випадок цього перетворення при $a = 1$ можна зробити за допомогою довідки «Додавання рівнянь». Використовуючи довідку «Виключення змінної» можна підставляти значення змінної, яке знайдено з одного із рівнянь системи, в інше, тобто перетворити систему рівнянь $\begin{cases} x = H(y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$ на систему $\begin{cases} x = H(y) \\ F(H(y), y) = 0 \end{cases}$. Підрозділ «Логічні перетворення систем» містить довідку «Розгляд окремих випадків». Ця довідка надає можливість перетворити сукупність $\left[\begin{array}{l} F \\ \begin{cases} G \\ H \end{cases} \end{array}\right.$ на сукупність $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} F \\ G \end{cases} \\ \begin{cases} F \\ H \end{cases} \end{array}\right.$. Якщо здійснено таке перетворення, то потім можна проводити окремі перетворення кожної з отриманих систем.

Дуже важливим є підрозділ «Розв'язування систем нерівностей». Довідка «Спростити систему» надає можливість проводити такі заміни: систему нерівностей $\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$ можна замінити на нерівність $x < \min(a,b)$; систему $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$ - на нерівність $x > \max(a,b)$; якщо $a \le b$, то систему нерівностей $\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$ можна замінити вказівкою на несумісність системи $x \in \varnothing$; систему нерівностей $\begin{cases} x \le a \\ x \ge a \end{cases}$ можна замінити на рівність $x = a$. За допомогою довідки «Розв'язати систему найпростіших лінійних нерівностей» можна записати множину розв'язків таких нерівностей у вигляді числового проміжку. Довідка «Знайти перетин (об'єднання) числових проміжків» дозволяє множину точок числової осі, яка задана системою, або сукупністю проміжків записати у вигляді їх перетину чи об'єднання. Так множина, яка задана системою $\{x : x \in (a;b),\ x \in (c;d)\}$ дорівнює множині $\{x : x \in (a;b) \bigcap x \in (c;d)\}$. Якщо множина задана сукупністю $\{x : x \in (a;b),\ x \in (c;d)\}$, то вона дорівнює множині $\{x : x \in (a;b) \bigcup x \in (c;d)\}$. Довідка «Спростити систему (сукупність), один із членів якої має визначене логічне значення» дозволяє замінити систему, або сукупність висловлень одним висловленням. Наприклад, систему $\begin{cases} x \in \varnothing \\ F \end{cases}$ можна замінити на висловлення x $\in \varnothing$.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Львов М.С. Терм VII – шкільна система комп'ютерної алгебри //Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – № 7. – С.27-30.