

Шкільна система комп'ютерної алгебри ТерМ 7-9. Принципи побудови та особливості використання.

В [5] описано 1-у версію програмно-методичного комплексу ТерМ 7, (ПМК ТерМ 7) призначеного для використання при вивченні курсу алгебри за 7 клас загальноосвітньої школи. В цитованій роботі також сформульовано загальну концепцію математичних систем підтримки практичної навчальної математичної діяльності, розглянуто структуру ПМК ТерМ 7, наведено опис функціональності його модулів. Дана робота є безпосереднім продовженням [5]. Ми розглядаємо 2-гу версію ПМК ТерМ, яку призначено для вивчення алгебри за 7-9 класи загальноосвітньої школи.

Нагадаємо, що основним призначенням ПМК ТерМ є комп'ютерна підтримка практичних занять і лабораторних робіт з математики – тобто активної математичної діяльності користувача (учня, студента). У процесі такого роду діяльності учень використовує теоретичні знання, надбані на попередніх етапах навчання, для розв'язування практичних задач.

ПМК ТерМ може використовуватися вчителем на уроці у процесі пояснення методів розв'язування алгебраїчних задач, для проведення самостійних і контрольних робіт. Окремий модуль призначений для перевірки практичних вмінь учнів та надбання ними навичок алгебраїчних перетворень.

Основний вид діяльності користувача ПМК – розв'язування математичної задачі. Цей процес є послідовністю кроків, на кожному з яких користувач виконує деяке перетворення математичного об'єкта – моделі математичної задачі. Таким чином, основним програмним модулем ПМК є спеціальний модуль - *Середовище розв'язування (задач)*. Основні функції цього модуля – перевірка правильності перетворень, виконаних користувачем, або автоматичне виконання перетворення за командою користувача. Список припустимих перетворень надано у модулі *Довідник*, звідки користувач на кожному кроці обирає потрібне перетворення. Редагування і перетворення алгебраїчних виразів підтримуються спеціалізованим *Математичним редактором*.

Джерелом задач є *Задачник* - модуль системи, в якому представлені всі типи задач, що підтримуються *Середовищем розв'язування*. Розв'язані задачі зберігаються в *Зошиті* користувача. Перелічені вище програмні модулі безпосередньо підтримують процес розв'язування задачі.

Важливим модулем системи є *Навчальний посібник*. У посібнику представлено теоретичний матеріал. Подання цього матеріалу доповнюється програмним модулем *Вправи*. Мета кожної вправи в цій системі - усне розв'язування нескладних задач з даної теми. Система перевіряє правильність відповіді.

Нарешті, ПМК містить програмні модулі (математичні інструменти) – *Розв’язувач* і *Графіки*. Модуль *Розв’язувач* призначений для розв’язування стандартних задач з алгебри. Модуль *Графіки* призначений для ілюстрації графічних методів розв’язування алгебраїчних задач.

На відмінність від 1-ої версії, 2-га версія ПМК містить навчальний матеріал за три класи навчання у загальноосвітній школі – 7, 8 і 9 класи. Тому ПМК ТерМ є по суті ланцюгом програм, які об’єднані загальними принципами побудови, використання та засобів інтерфейсу.

При побудові ТерМ 7-9 було прийнято рішення про реалізацію підручників та задачників з алгебри окремо для 7-го, 8-го та 9-го класів. Таке рішення дозволило скоротити тексти електронних дидактичних матеріалів, зробивши їх більш легкими для використання. Деяке удосконалення зроблено в системі виклику вправ для самостійного розв’язання. Зараз зміст вправи наведено у тексті підручника – наприкінці практично кожного розділу.

При реалізації математичного редактора, Середовища розв’язання, Розв’язувача та Графіків було прийнято рішення про дотримання *принципу розширення функціональності* цих модулів у кожному наступному класі навчання порівняно з попереднім. Таким чином, наприклад, учень 9-го класу має можливість використовувати засоби розв’язування задач за попередні класи навчання. Наочно принцип розширення функціональності ілюструють панелі шаблонів математичного редактора для різних класів навчання:

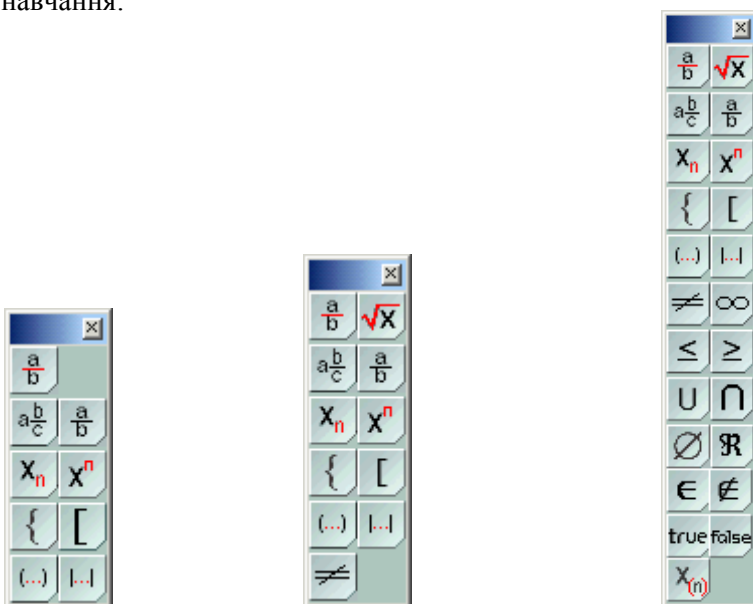


Рис. 1 Панелі шаблонів математичного редактора для VII, VIII, IX класів навчання.

Наведено також переліки навчальних задач з алгебри, які розв'язуються ПМ Розв'язувач, реалізований також за принципом розширення функціональності:

Задачі Розв'язувача.

VII клас:

- розв'язати лінійне рівняння;
- спростити цілий алгебраїчний вираз;
- знайти значення цілого алгебраїчного виразу при даних значеннях змінних;
- перевірити тотожність цілої алгебраїчної рівності;
- розв'язати систему лінійних рівнянь.

VIII клас:

- задачі VII класу навчання;
- обчислити значення числового виразу з квадратними коренями;
- розв'язати квадратне рівняння;
- розв'язати раціональне рівняння;
- розв'язати систему алгебраїчних рівнянь визначеного типу.

IX клас:

- задачі VII-VIII класів;
- розв'язати лінійну нерівність;
- розв'язати квадратичну нерівність;
- розв'язати раціональну нерівність;
- розв'язати нерівність з квадратним коренем визначеного типу;
- розв'язати систему лінійних нерівностей.

За аналогічною схемою реалізовано також ПМ Графіки, ПМ Середовище розв'язання.

Розділи математики та класи навчальних задач з алгебри, які вивчаються у 7-9 класах загальноосвітньої школи, знайшли своє відображення як дидактичні матеріали ПМ Підручник, ПМ Задачник, переліки типів задач, які можна вводити з клавіатури у ПМ Середовище розв'язування (стандартні задачі), та зміст довідників ПМ Середовище розв'язування, ПМ Розв'язувач, ПМ Графіки.

При розташуванні дидактичного матеріалу підручника та задачника використано принцип повної відповідності існуючій програмі з алгебри для 7-9 класів загальноосвітньої школи. Це було зроблено за вимогами технічного завдання. Зауважимо, що, дидактичний матеріал логічніше було б реалізувати як сукупність дидактичних модулів, пов'язаних відношенням логічного слідування. Це дало б змогу користувачеві ПМК будувати індивідуальну траєкторію навчання.

7 клас

1. Лінійні рівняння однієї змінної.
2. Цілі вирази.
3. Розкладання многочлена на множники.
4. Системи лінійних рівнянь.

8 клас

1. Раціональні вирази.
2. Квадратні корені і дійсні числа.
3. Квадратні рівняння.

4. Функції.

9 клас

1. Нерівності.

2. Функції і графіки.

3. Числові послідовності.

4. Елементи прикладної математики.

Аналіз проблем, які виникали в процесі проектування Довідника ПМК ТерМ 7-9, виявив важливі як з методичної, так і технічної точки зору аспекти:

Проблема 1. Рівень формальності запису процесу логічного доведення, на якому базується покрокове розв'язування навчальної задачі у ПМ „Середовище розв'язування” ПМК ТерМ, має бути значно вищим, ніж той рівень формальності, який звичайно використовують учні і вчителі при запису ходу розв'язування шкільної алгебраїчної задачі в зошиті.

Проблема 2. Поняття логічного доведення, яке було використано у першій версії ТерМ, для другої версії треба істотно удосконалити у зв'язку з появою у 8-9 класах принципово нових типів навчальних задач, для яких треба будувати хід розв'язування.

Проблема 3. В процесі розв'язування навчальних алгебраїчних задач, починаючи з 8-го класу, разом з алгебраїчними перетвореннями, мають використовуватися класичні логічні засоби доведення, які, як відомо, у явному вигляді не вивчаються у загальноосвітній школі. При цьому вже для навчальних задач за 9-ий клас класичні логічні засоби доведення є по суті основними.

Для ілюстрації означених проблем наведемо приклади:

Проблема 1. На рис 2 наведено копію екрану ПМ Середовища розв'язування з ходом розв'язування квадратного рівняння. Як видно з рисунку, кожен з кроків ходу розв'язування – коректна з точки зору логіки математична формула. Як приклад, звернемо увагу на крок розв'язування, у якому обчислюється дискримінант. Перетворення полягає у тому, що формула-рівняння перетворюється на систему рівностей, другим членом якої є рівність, що визначає дискримінант. Далі, звернемо увагу на те, що ця система рівностей в результаті застосування формули коренів квадратного рівняння (через дискримінант) перетворилася у сукупність найпростіших лінійних рівнянь, які по суті представляють відповідь задачі. Нарешті, для того, щоб подати відповідь у звичному вигляді, у довідник введено спеціальне перетворення, яке „нумерує” елементи відповіді, перетворюючи сукупність у систему, в якій змінна X замінюється на X_1 , X_2 .

Задача 192.5.

Розв'язати рівняння виділенням повного квадрату двучлена:

$$x^2 + 12x = -35$$

Розв'язання

Перетворимо вираз. Отримаємо:

$$x^2 + 12x + 35 = 0$$

Обчислимо дискримінант квадратного рівняння

$$\begin{cases} x^2 + 12x + 35 = 0 \\ D = 12^2 - 4 \cdot 35 \end{cases}$$

Перетворимо вираз. Отримаємо:

$$\begin{cases} x^2 + 12x + 35 = 0 \\ D = 12^2 - 140 \end{cases}$$

Замінимо вираз на рівний. Отримаємо:

$$\begin{cases} x^2 + 12x + 35 = 0 \\ D = 4 \end{cases}$$

Визначивши знак дискримінанту, знайдемо кількість коренів рівняння та запишемо відповідну формулу його коренів:

$$\begin{cases} x = \frac{-12 + \sqrt{4}}{2 \cdot -1} \\ x = \frac{-12 - \sqrt{4}}{2 \cdot -1} \end{cases}$$

Перетворимо вираз. Отримаємо:

$$\begin{cases} x = -5 \\ x = -7 \end{cases}$$

Запишемо розв'язок рівняння у вигляді системи найпростіших рівнянь з номерованими змінними:

$$\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

Рис 2. Хід розв'язання квадратного рівняння.

Розв'язання проблеми 1 ми бачимо у тому, щоб, зберігаючи необхідно високий рівень формалізації кроків логічного доведення, зробити їх максимально зрозумілими для користувача за рахунок ретельного методичного аналізу змісту перетворень, з яких складається розв'язування задачі та включення їх до складу Довідника з відповідними текстовими коментарями.

Проблема 2. Аналіз основних задач, які є предметом вивчення у курсі Алгебра 7, показує, що практично всі вони розв'язуються класичними засобами екваціонального доведення. У 8-му класі з'являються задачі, розв'язування яких потребує спеціальних (некласичних) перетворень. Наведемо одну з таких задач:

Задачник Алгебра 8. Задача 215. Записати обернену теорему Вієта для даного рівняння і знайти добром його корені: $x^2 - x - 20 = 0$

Зауважимо, що цю задачу не можна назвати стандартною (до стандартних ми відносимо такі задачі: розв'язати рівняння, нерівність, систему рівнянь або нерівностей, довести тотожність, спростити вираз, обчислити значення виразу). Для того, щоб надати можливість користувачеві розв'язувати такі нестандартні задачі, треба реалізувати деякі спеціальні перетворення. На рис 3. показано хід розв'язування задачі 215.

Середовище розв'язання

Задача 215.1.

Записати обернену теорему Вієта для даного рівняння і знайти підбором його корені:

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

Розв'язання

Почнемо розв'язування

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

Застосуємо теорему Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \cdot x_2 = 20 \end{cases}$$

Надамо змінній значення:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \cdot x_2 = 20 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

Надамо змінній значення:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 \cdot x_2 = 20 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

Перетворимо вираз. Отримаємо:

$$\begin{cases} 12 = 12 \\ 20 = 20 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

Відповідь

Задачу розв'язано:

Рис 3. Розв'язання нестандартної задачі на теорему Вієта.

Як бачимо, до спеціальних перетворень відноситься перетворення, визначене оберненою теоремою Вієта та перетворення – надання змінній деякого значення. Після того, як користувач надав змінним x_1 , x_2 деяких значень, він має перевірити правильність розв'язання, підставивши ці значення у рівності – формулювання теорему Вієта.

І знову ж, розв'язання цієї проблеми, як і проблеми 1, полягає у ретельному методичному аналізі нестандартних задач та виявленні таких спеціальних перетворень, які, з одного боку, можна використовувати природним чином, а з іншого боку, які не були б занадто спеціальними, тобто застосовуваними лише для окремих задач. Вдалий приклад такого перетворення – це перетворення - надання змінній деякого значення.

Проблема 3. Процес розв'язування навчальних задач з алгебри для 8-9 класів, як правило, потребує від учня вміння робити *логічні висновки* та застосовувати ці вміння на практиці у вигляді *логічних перетворень*. Логічний аналіз отриманої формули та адекватний вибір продовження розв'язування стає, починаючи з 8-го класу, невід'ємною складовою частиною практичної математичної діяльності. Особливо наочно цей факт ілюструють задачі на розв'язування нерівностей та систем нерівностей (9 клас). На рис. 4 наведено екранну копію початку розв'язування нерівності (Задачник. Алгебра 9. Задача 16.10). Вже перший крок розв'язування нерівності по суті перетворює нерівність у формулу алгебри логіки.

Середовище розв'язання

Файл Вигляд Задача Хід розв'язування Інструменти Допомога

Задача 16.10.

Розв'язати нерівність:

$$\left(x + \frac{13}{3}\right)\left(x - \frac{12}{7}\right) < 0$$

Розв'язання

Почнемо розв'язування

$$\left(x + \frac{13}{3}\right)\left(x - \frac{12}{7}\right) < 0$$

Перетворимо нерівність з добутком в лівій частині на сукупність систем нерівностей.

$$\begin{cases} x + \frac{13}{3} < 0 \\ x - \frac{12}{7} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{13}{3} > 0 \\ x - \frac{12}{7} < 0 \end{cases}$$

Перетворимо вираз. Отримаємо:

$$\begin{cases} x < -\frac{13}{3} \\ x > \frac{12}{7} \\ x > -\frac{13}{3} \\ x < \frac{12}{7} \end{cases}$$

Рис 4. Нерівність виду $A \cdot B < 0$ та її перетворення у логічну формулу.

Середовище розв'язання

Файл Вигляд Задача Хід розв'язування Інструменти Допомога

Задача 16.10.

Розв'язати нерівність:

$$\left(x + \frac{13}{3}\right)\left(x - \frac{12}{7}\right) < 0$$

Розв'язання

Перетворимо вираз. Отримаємо:

$$\begin{cases} x < -\frac{13}{3} \\ x > \frac{12}{7} \\ x > -\frac{13}{3} \\ x < \frac{12}{7} \end{cases}$$

Спростимо систему найпростіших нерівностей

$$\begin{cases} x \in \emptyset \\ x > -\frac{13}{3} \\ x < \frac{12}{7} \end{cases}$$

Розв'яжемо систему найпростіших лінійних нерівностей, записавши відповідь у вигляді числового проміжку.

$$\begin{cases} x \in \emptyset \\ x \in \left(-\frac{13}{3}, \frac{12}{7}\right) \end{cases}$$

Рис 5. Перетворення логічної формули.

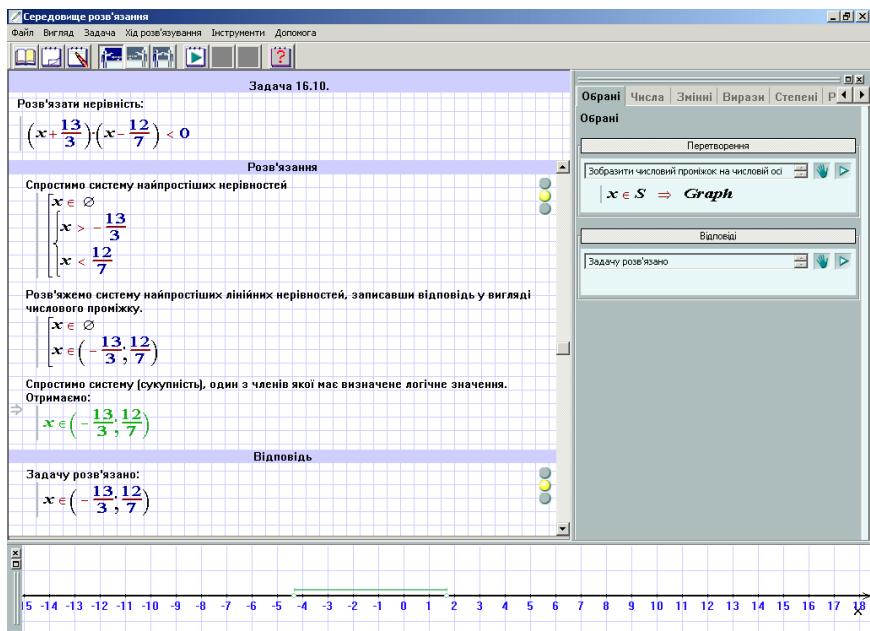


Рис 6. Спрощення логічної формули та графічна ілюстрація розв'язку.

Розв'язуючи задачу далі, учень має знайти логічні значення кожної з систем, які утворюють сукупність. В даній задачі перша з систем нерівностей не має розв'язків, тобто має бути записаною у вигляді $x \in \emptyset$. Розв'язок другої системи нерівностей треба записати у вигляді числового проміжку. (рис. 5). Отриману сукупність можна спростити, врахувавши логічне значення першого відношення. Нарешті, завершує розв'язування побудови отриманого розв'язку на числовій осі (рис 6).

Отже, Довідник середовища розв'язання має містити достатньо розвинуті засоби перетворення логічних формул, тобто логічних перетворень. Методична проблема полягає у тому, що ці засоби вивчаються лише у неявному вигляді. Зваживши аргументи ЗА ти ПРОТИ, ми вирішили ввести у Довідник необхідний мінімум логічних перетворень, поклавши на вчителя практичні аспекти їх вивчення.

Деякі можливості ПМК ТерМ 7 в силу різних причин або не реалізовані в ТерМ 7-9, або реалізовані у обмеженому вигляді. Перелічимо основні з них:

1. В ПМК ТерМ 7 режим перевірки правильності кроку розв'язування можна застосовувати для всіх типів стандартних задач. В ПМК ТерМ 7-9 цей режим пропонується застосовувати лише для тих задач, математичною формулою яких є вираз. Це задачі на спрощення виразів, обчислення значень виразів, перетворення виразів до певного вигляду. Вказане обмеження зумовлено складністю реалізації даного режиму для таких задач, в

яких перетворюються достатньо складні математичні об'єкти: квадратні рівняння та нерівності, системи алгебраїчних рівнянь тощо.

2. В ПМК ТерМ 7 реалізовані команди, які дають можливість користувачеві зробити логічний аналіз розв'язку (відповіді) стандартних навчальних задач за 7 клас (розділ Відповіді). В ПМК ПМК ТерМ 7-9, у зв'язку з тим, що клас задач, які розв'язуються у середовищі розв'язування, істотно розширився, таку можливість не реалізовано. Це пояснюється тим, що розділ Відповіді розширився настільки, що з ним стало незручно працювати.

3. Деяких пояснень потребує вибір стандартних задач, які можна розв'язувати у ПМ Розв'язувач та ПМ Графіки. Так, у ПМ Розв'язувач не реалізовано задачу розв'язування довільної системи алгебраїчних рівнянь. Справа у тому, що загальні методи розв'язування цієї задачі далеко виходять за межі курсу шкільної алгебри. Ми ж дотримувалися принципу: *ПМ Розв'язувач має надавати відповіді лише на ті задачі, методи розв'язування яких учень має знати, а вчитель може пояснити*. Тому у ПМ реалізовано розв'язування систем алгебраїчних рівнянь певного, дуже простого типу: лише одне з рівнянь системи може бути нелінійним, а її розв'язування зводиться до розв'язування квадратного рівняння. Те ж саме можна сказати і про ПМ Графіки. Там, наприклад, неможливо знайти точки перетину гіперболи та параболи, оскільки алгебраїчний метод розв'язування цієї задачі зводить відповідну систему рівнянь до кубічного рівняння, загальну формулу розв'язку якого у шкільному курсі алгебри не вивчають.

На відмінність від програм, створених за принципами програмованого навчання, ТерМ не „веде” процес навчання, задаючи учневі питання та оцінюючи відповіді. Тому ми вважаємо за необхідне підкрестити, що *вчитель є тією головною особою, яка здійснює навчання*. Він розроблює і тематичні плани, і плани окремих занять. Він пояснює новий матеріал, добирає задачі для розв'язування на практичних заняттях, нарешті, оцінює знання своїх учнів. ПМК ТерМ надає і вчителю, і учням якісно нові можливості – контролює правильність обчислень, звільняє від необхідності переписувати формули і таке інше. Засобами ПМК ТерМ можна наглядно демонструвати методи розв'язування задач, розв'язувати задачі творчого, дослідницького характеру, робити обчислювальні експерименти і т.ін. Більш детально наші концепції педагогічно-орієнтованих систем підтримки практичної діяльності викладені в [1-4]. Зауважимо, що конкретні методики навчання математики з використанням систем комп'ютерної алгебри зараз знаходяться в центрі уваги наукової громадськості. Інформацію про міжнародні науково-методичні форуми можна знайти на персональному сайті Bernhard Kutzler.

<http://b.kutzler.com>.

ПМК ТерМ 7-9 призначено для вивчення алгебри в 7-9 му класі загальноосвітньої школи. ПМК реалізовано українською

мовою. Зараз ведуться роботи по реалізації ПМК ТерМ російською та англійською мовами.

Проектування та розробку ТерМ виконано в лабораторії з розробки та впровадження педагогічних програмних засобів науково-дослідного інституту інформаційних технологій ХДУ за замовленням НМЦ організації та впровадження засобів навчання МОІН України.

ЛІТЕРАТУРА

1. О.В. Співаковський, М.С.Львов та ін. Педагогічні технології та педагогічно-орієнтовані програмні системи: предметно-орієнтований підхід. // Комп'ютер у школі та сім'ї:- №2 (20), 2002 – С. 17-21
2. О.В. Співаковський, М.С.Львов та ін. Педагогічні технології та педагогічно-орієнтовані програмні системи: предметно-орієнтований підхід. // Комп'ютер у школі та сім'ї:- №3 (21), 2002 – С. 23-26
3. О.В. Співаковський, М.С.Львов та ін. Педагогічні технології та педагогічно-орієнтовані програмні системи: предметно-орієнтований підхід. // Комп'ютер у школі та сім'ї:- №4 (22), 2002 – С. 24-28
4. М.С. Львов. Концепція програмної системи підтримки математичної діяльності.// Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць/ К.:НПУ ім. М.П.Драгоманова.- випуск 7.-2003.- С.36-48.
5. М.С. Львов. Терм VII – шкільна система комп'ютерної алгебри. // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2004. – №7.- С. 27-30