УДК 372.8:348.02

В.І. Клочко, З.В. Бондаренко
Вінницький державний технічний університет

Деякі аспекти методики застосування нових інформаційних технологій під час вивчення теми "Диференціальні рівняння" у вищому технічному навчальному закладі

Процес вивчення будь-якої дисципліни включає в себе: навчальну інформацію, діяльність студента, додаткові засоби передачі інформації, контроль результатів. Перша складова частина навчання – навчальна інформація, яка відповідає сьогоднішньому рівню розвитку науки та техніки. Але обсяг інформації постійно зростає і для якісного засвоєння її необхідно або збільшувати кількість годин на вивчення дисципліни (тобто постійно збільшувати термін навчання), або інтенсифікувати навчання. Але, як показує практика, кількість годин, що відводиться на навчання постійно зменшується. Таким чином залишається другий шлях: студент повинен у відведені навчальним планом години якісно та творчо засвоїти запропонований навчальний матеріал. Це змушує викладачів шукати та впроваджувати у практику нові методи та моделі навчання, які при постійному використанні забезпечують підвищення якості навчальної праці протягом усього навчання в університеті, розвивають у студентів творчі здібності. В умовах всебічного використання комп'ютерних технологій навчання, великої кількості навчальної інформації та зменшення обсягу аудиторних годин для навчальних дисциплін актуальним є питання форм комп'ютерної підтримки навчального процесу. Активне впровадження нових інформаційних технологій висвітлило проблему методології та дидактики організації проведення практичних занять з вищої математики, зокрема з курсу "Диференціальні рівняння " в технічному ВНЗ.

Використання математичних пакетів (DERIVE, GRAN1, GRAN-2D, MathCAD та інших) дає можливість урізноманітнити завдання. Студент самостійно виконує частину аналітичних перетворень, а числові та аналітичні розв'язки одержує за допомогою пакета. Застосовуючи ці засоби нових інформаційних технологій, викладач реалізує найбільш повно принцип діяльності у самостійній роботі студента. Студент має можливість вільного вибору (в певних межах) стратегії розв'язування задачі, а, отже і навчання. Працюючи в середовищі математичних пакетів, студент повністю зосереджується на постановці задачі та аналізові одержаних результатів і уникає труднощів, пов'язаних з обчисленням.

Розглянемо деякі аспекти методики застосування математичних пакетів під час вивчення теми "Диференціальні рівняння" на прикладі розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку, оскільки вони є математичними моделями в різних галузях знань як технічних, так і гуманітарних.

Нехай рівняння (1) має вигляд:

$$x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = 4\sin 3t,\ x(0)=0,\ x'(0) = 0 \qquad (1)$$

Завдання полягає в тому, щоб знайти розв'язок диференціального рівняння (ДР) методом невизначених коефіцієнтів та методом варіації довільних сталих, скориставшись пакетом DERIVE. На етапі вивчення запропонованих методів студент відтворює всі кроки щодо відповідних алгоритмів. Це дає можливість:

1.Зрозуміти суть методу.

2.Ознайомитись з роботою деяких функцій пакету (знаходження коренів квадратного рівняння, обчислення похідних першого та другого порядку).

Такий підхід до застосування пакету доцільний на етапі формування та поглиблення нових знань, виховує у студентів чіткість виконання дій, допомагає оптимізувати шлях виконання завдання, вимагає від користувача зменшувати час на обміркування власних дій та кроків розв'язування, глибше та точніше сприймати ідеї та методи, з меншими затратами часу оволодіти важливим для спеціальності студента математичним матеріалом, зміст якого він не зміг би зрозуміти через те, що своєчасно не засвоїв на відповідному рівні техніку диференціювання та інший математичний апарат.

Метод невизначених коефіцієнтів.

Завдання виконується за такою схемою. Скориставшись пакетом DERIVE, студенти знаходять загальний розв′язок $x_o(t)$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДР):

$$x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = 0. \qquad (2)$$

Характеристичне рівняння має корені:

```
#1:  λ^2 + 3·λ + 5 = 0
#2:  λ :∈ Complex
#4:  [λ = -1.5 + 1.65831·î, λ = -1.5 - 1.65831·î]
```

Загальний розв′язок запишеться у вигляді

$$x_o(t) = e^{-1.5t}(C_1\cos(1.65831t) + C_2\sin(1.65831t)). \qquad (3)$$

Далі студенти записують частинний розв′язок ДР (2) :

$$x_ч(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t) \qquad (4)$$

та підставляють (4) у рівняння (2). З цією метою засобами пакета знаходяться $x''(t)$, $x'(t)$, формується система рівнянь відносно a і b і розв′язується:

```
#1:  a·COS(3·t) + b·SIN(3·t)
#2:  3·b·COS(3·t) - 3·a·SIN(3·t)
#3:  - 9·a·COS(3·t) - 9·b·SIN(3·t)
#4:  (9·b - 4·a)·COS(3·t) - (9·a + 4·b)·SIN(3·t) = 4·SIN(3·t)
#5:  9·b - 4·a = 0
#6:  - 9·a - 4·b = 4
#7:  [ a = -0.371134  b = -0.164948 ]
```

Отже, частинний розв′язок ДР (2) набуває вигляду:

$$x_ч(t) = -0.371134\cos(3t)\ \ -0.164948\sin(3t). \qquad (5)$$

Формується загальний розв′язок ДР (2):

$$x(t)=e^{-1.5t}(C_1\cos(1.65831t)+C_2\sin(1.65831t))-0.371134\cos(3t)-0.164948\sin(3t) \quad (6)$$

Далі студенти розв′язують задачу Коші, одержують значення констант $C_1 = 0.371134$, $C_2 = 0.634105$, а частинний розв′язок ДР (2), який задовольняє заданим початковим умовам, є розв′язок задачі і набуває вигляду

$$x(t) = e^{-1.5t}(0.371134\cos(1.65831t)+0.634105\sin(1.65831t))-0.371134\cos(3t)-0.164948\sin(3t) \qquad (7)$$

Нижче наведено програму розв′язання задачі Коші.

#1: $\hat{e}^{-1.5\cdot t}\cdot(a\cdot COS(1.65831\cdot t) + b\cdot SIN(1.65831\cdot t)) - 0.371134\cdot COS(3\cdot t) - 0.16$

#2: $-\hat{e}^{-1.5\cdot t}\cdot(3\cdot 10^{-5}\cdot(5\cdot 10^{4}\cdot a - 5.5277\cdot 10^{4}\cdot b)\cdot COS(1.65830\cdot t) + 3\cdot 10^{-5}\cdot(5.52$

#3: $-10^{-6}\cdot(1.5\cdot 10^{6}\cdot a - 1.65831\cdot 10^{6}\cdot b + 4.94843\cdot 10^{5})$

#4: $a - 0.371134$

#5: $[\ a = 0.371134 \quad b = 0.634105\ ]$

Як уже зазначалось, застосування математичних пакетів створює умови для вивчення або ознайомлення студентів із більшою кількістю методів, поглибленим аналізом умов застосування методів. На практичному занятті, а тим більше, у типовому розрахунку може бути розглянуто і інші методи, зокрема метод варіації сталих.

Метод варіації довільних сталих.

Студенти використовують уже знайдений загальний розв′язок рівняння (2):

$$x_o(t) = e^{-1.5t}(C_1\cos(1.65831t) + C_2\sin(1.65831t)).$$

Замінивши константи C_1 і C_2 функціями $C_1(t)$, $C_2(t)$ записують загальний розв'язок рівняння (1):

$$x(t) = e^{-1.5t}(C_1(t)\cos(1.65831t) + C_2(t)\sin(1.65831t)). \qquad (8)$$

У середовищі пакета формується система рівнянь відносно функцій $C_1(t)$ і $C_2(t)$, яка набуває вигляду:

$$e^{-1.5t}(C_1'(t)\cos(1.65831t) + C_2'(t)\sin(1.65831t))=0, \qquad (9)$$

$$e^{-1.5t}(C_1'(t)(-1.5\cos(1.65831t)-1.6583\sin(1.65831t)) + C_2'(t)(- 1.5\sin(1.65831t) + +1.65831\cos(1.65831t))) =4\sin(3t).$$

Розв′язавши систему (9) та підставивши у формулу (8), студенти одержують розв′язок

$$x(t)=e^{-1.5t}(0.371129\cos(1.65831t)+0.634106\sin(1.65831t))-0.371132\cos(3t)-0.164946\sin(3t).$$

На етапі закріплення знань доцільно скористатись програмою Maple. Але використання пакету дає можливість викладачеві розв’язати лише деякі дидактичні задачі. Так, процес розв’язування задачі за допомогою пакета має неявний характер, він схований від користувача, не пояснюється шлях, що веде до одержання результату. Використання пакету веде до втрати навичок побудови загальних розв’язків задачі. Тому дидактична ефективність математичного пакету зростає на етапах закріплення та застосування знань, що дає можливість в різних аспектах опрацювати навчальний матеріал.

Завданням для самостійної роботи може бути перевірка одержаного результату (7) за допомогою пакета Maple.

➤ ***with(DEtools):***
dsolve({diff(x(t),t$2)+3*diff(x(t),t)+5*x(t)=4*sin(3*t),x(0)=0,D(x)(0)=0},x(t))

Виконання типового розрахунку або курсової роботи після вивчення “Операційного числення”, може полягати у розв’язанні рівняння (1) методом інтегрального перетворення Лапласа. Якщо метою такого завдання є оволодіння самим методом, тоді необхідно відтворювати і контролювати кожний крок відповідного алгоритму. Мовою математичного пакета складається програма для інтегрування ДР і студент має можливість контролювати кожний крок застосування перетворення Лапласа.

Завдання типового розрахунку може виконуватись у такій послідовності:

перший етап

■ знайти зображення *F(p)* ДР за допомогою функції ***laplace***;
■ розвинути одержаний дріб *F(p)* на елементарні дроби;
■ застосувати функцію оберненого перетворення Лапласа ***invlaplace***.

другий етап

■ знайти зображення *F(p)* ДР за Лапласом;
■ розвинути одержаний дріб *F(p)* на елементарні дроби;
■ застосувати лишки до знаходження оригіналу

Такий порядок виконання роботи дає можливість студенту опрацювати і запам’ятати послідовність дій в наведених алгоритмах, а також ознайомитись з функціями пакету Maple, за допомогою яких дріб подається у вигляді суми елементарних дробів, знаходяться лишки функцій, перетворюється комплексна форма розв’язків.

> ***laplace(diff(x(t),t$2)+3*diff(x(t),t)+5*x(t)=4*sin(3*t),t,s);***
> ***with(grobner):***
➤***solve(lp*s^2+3*s*lp+5*lp=12/(s^2+9),lp);***

Знаходиться зображення розв'язку рівняння *x(t):*

$$12\,\frac{1}{\left(s^2+9\right)\left(s^2+3\,s+5\right)}$$

За допомогою функцій пакета дріб подається у вигляді суми елементарних дробів:

> ***convert(12/((s^2+9)*(s^2+3*s+5)),parfrac,s,true);***

$$-\frac{12}{97}\,\frac{4+3\,s}{s^2+9}+\frac{12}{97}\,\frac{13+3\,s}{s^2+3\,s+5}$$

За допомогою функції оберненого перетворення Лапласа знаходиться загальний розв'язок:

> readlib(laplace):

> invlaplace(12/97*((13+3*s)/(s^2+3*s+5)-(3*s+4)/(s^2+9)),s,t);

$$-\frac{16}{97}\sin(3\ t)-\frac{36}{97}\cos(3\ t)+\frac{204}{1067}\,e^{(-3/2\ t)}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{11}\ t\right)\sqrt{11}$$
$$+\frac{36}{97}\,e^{(-3/2\ t)}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{11}\ t\right)$$

або

$$.6341063327\,e^{(-1.500000000\,t)}\sin(1.658312395\ t)$$
$$+.3711340206\,e^{(-1.500000000\,t)}\cos(1.658312395\ t)$$
$$-.3711340206\cos(3.\ t)-.1649484536\sin(3.\ t)$$

Як бачимо, результат співпав з попередніми.

Під час вивчення предметів фахового циклу студентам багатьох спеціальностей необхідні на достатньому рівні знання лишків. Тому в процесі розв'язання ДР є нагода повторити цю тему. Тому до знаходження оригіналу *x(t)* за даним зображенням *F(p)* застосовуються лишки.

З цією метою знаходяться полюси першого та другого доданків.

$$-\frac{12}{97}\,\frac{4+3\ s}{s^2+9}+\frac{12}{97}\,\frac{13+3\ s}{s^2+3\ s+5}$$

Наприклад, полюси другого доданку знаходяться таким чином:

> solve(s^2+3*s+5=0,s);

$$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{11},\ -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{11}$$

Якщо позначити суму елементарних дробів зображення через *F1*

$$F1 := -\frac{12}{97}\,\frac{3\ s+4}{s^2+9}+\frac{1}{97}\,\frac{156+36\ s}{s^2+3\ s+5},$$

то полюси знаходяться з використанням функцій ***denom*** (відокремлення знаменника), ***solve*** (розв'язання рівняння):

>F2:=denom(F1);

$$F2 := \left(s^2+9\right)\left(s^2+3\ s+5\right)$$

>sols:=[solve(F2,s)];

$$sols := \left[3\ I,\ -3\ I,\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{11},\ -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{11}\right]$$

Далі знаходяться лишки функції *exp(pt)F(p)*. Наведемо програму знаходження лишку щодо полюса *p1=3I*.
>x1:=residue(F1*exp(s*t), s=sols[1]);

$$x1 := \left(-\frac{18}{97} + \frac{8}{97} I \right) e^{(3 I t)}$$

Об′єднавши всі чотири випадки в одну програму, студенти одержують розв'язок:
>x(t):= (residue(c1*exp(s*t), s = sols[1]) + residue(F1*exp(s*t), s = sols[2]) + residue(F1*exp(s*t), s=sols[3])+residue(F1*exp(s*t), s=sols[4]));

$$x(t) := \left(-\frac{18}{97} - \frac{8}{97} I \right) e^{(-3 I t)} - \frac{24}{11} \frac{I\, e^{\left(1/2\left(-3 + I\sqrt{11}\right) t\right)} \sqrt{11}}{-3 I \sqrt{11} + 17} - \frac{24}{11} \frac{I\, e^{\left(-1/2\left(3 + I\sqrt{11}\right) t\right)} \sqrt{11}}{-3 I \sqrt{11} - 17}$$

Далі за допомогою функцій ***evalf*** і ***evalc*** комплексна форма розв′язку *x(t)* перетворюється до дійсної.
>x(t):=evalf(evalc(residue(c1*exp(s*t),s=sols[1])+residue(F1*exp(s*t), s=sols[2]) +residue(F1*exp(s*t), s=sols[3])+residue(F1*exp(s*t), s=sols[4]))));

$$x(t) := -.3711340206 \cos(3.\, t) - .1649484536 \sin(3.\, t) + .6341063328\, e^{(-1.500000000\, t)} \sin(1.658312395\, t) + .3711340206\, e^{(-1.500000000\, t)} \cos(1.658312395\, t)$$

Одержано результат, який співпав з попередніми.

Якщо метод розв’язування ДР реалізується не як мета навчання, а як засіб розв'язання диференціальних рівнянь, тобто, якщо метою знаходження розв’язків ДР є не стільки оволодіння методом, скільки аналіз результатів розв'язання, то для індивідуальної роботи може бути сформульовано таке завдання: знайти розв’язок ДР (1) методом Дюамеля. Студент, застосувавши систему Maple, реалізує всі кроки алгоритму, але для нього може залишатися схованим, наприклад, процес диференціювання і інтегрування згортки. Наведемо приклад.

Метод інтеграла Дюамеля

Спершу студенти знаходять розв′язок задачі Коші ДР:

x’’(t) + 3x’(t) + 5x(t) = 1, x(0)=0, x’(0)=0,

застосувавши систему Maple V.
> laplace(diff(y(x),x$2)+3*diff(y(x),x)+5*y(x)=1,x,s);
> invlaplace(1/(s*(s^2+3*s+5)),s,t);

$$.2000000000 - .1809068067\, e^{(-1.500000000\, t)} \sin(1.658312395\, t) - .2000000000\, e^{(-1.500000000\, t)} \cos(1.658312395\, t)$$

Далі знаходиться похідна одержаного розв′язку.

>diff(1/5-3/55*exp(-1.5*t)*sin(0.5*sqrt(11)*t)*sqrt(11)-0.5*exp(-1.5*t)*cos(0.5*sqrt(11) *t),t);

Розв′язок заданого ДР знаходиться шляхом інтегрування згортки:

>int(4*sin(3*x)*(.3318181818*exp(-1.5*(t-x))*sin(.5*sqrt(11)*(t-x))*sqrt(11)+0.45*exp(-1.5*(t-x))*cos(0.5*sqrt(11)*(t-x))),x=0..t);

$$-.1649484520 \sin(3.\, t) - .3711340169 \cos(3.\, t) + .3711340167\, e^{(-1.500000000\, t)} \cos(1.658312395\, t) + .6341063264\, e^{(-1.500000000\, t)} \sin(1.658312395\, t)$$

Розглянута методика проведення заняття демонструє студентам доцільність використовування комп'ютерів з метою ефективнішого засвоєння матеріалу; сприяє формуванню у студентів навичок використання пакетів, активізує навчально-пізнавальну діяльність студентів.

Збільшується кількість завдань, які можна розв'язати на занятті, що дає можливість глибше розкрити основні ідеї теми, викладач може включити складніші завдання, урізноманітнити їхній зміст, глибше проаналізувати розв'язки. Завдання та їх виконання при застосуванні ППП можуть відрізнятися від традиційних. Майже в десять разів скорочується час розв'язання однієї задачі, поглиблюється рівень оволодіння навчальним матеріалом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Клочко В.І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі: Дис. д. педагог. н. – К.: НПУ імені М.П. Драгомонова, 1997 – 396 с.

2. Дьяконов В.П. Справочник по применению системы DERIVE. – М.: Наука, 1996.

3.Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. Под ред. Р.С. Гутера. Изд. 2-е испр. – М.: Наука, 1972. – 400 с.

4.Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 442 с.