Раков С.А.
Харківський державний педагогічний
університет ім. Г.С.Сковороди

Математична діяльність та її підтримка засобами інформаційних технологій

Вступ

У роботі розглянуті питання предмета та метода математики, на їх основі проаналізована математична діяльність з точок зору когнітивної психології, гносеології та можливості її підтримки засобами інформаційних технологій. Висвітлена роль пакетів комп'ютерного моделювання для проведення експериментів як на етапі постановки математичних проблем, так і на етапі доказу або спростування гіпотез. Пакети комп'ютерної алгебри (CAS) розглядаються з точки зору моделювання математичних проблем на знаковому (символьному) рівні, а також як інструмент підтримки побудови дедуктивних доказів. Робиться висновок, що майбутнє математики є симбіоз математиків та комп'ютерів, оздоблених пакетами математичного моделювання та комп'ютерної алгебри, об'єднаних до єдиної спільноти засобами телекомунікацій. Наведено приклад комплексного використання інформаційних технологій у математичних дослідженнях.

Ключові слова: математика, пізнавальна діяльність, інформаційні технології, математичне моделювання, комп'ютерне моделювання, комп'ютерна алгебра.

Математика: предмет і метод

Як правило, в основу класифікації наук кладуть їх предмет дослідження, іншими словами науки відрізняються одна від одної тими сторонами дійсності які вони досліджують. Проте, математика випадає з цієї загальної схеми. Зупинимося коротко на цьому питанні.

Було зроблено багато спроб визначити специфічний предмет математики. Можна згадати широко відоме визначення Ф.Енгельса, згідно з яким, предметом дослідження математики є кількісні відношення та просторові форми дійсного світу. У теперішній час це визначення здається обмеженим[1], тому що з дуже великою натяжкою можна сказати, що під нього підпадають багато розділів сучасної математики, наприклад, теорія ймовірностей, загальна топологія або функціональний аналіз. Які кількісні відношення або просторові форми відбиває поняття банахового простору?

Більш досконалим можна вважати визначення М.Бурбакі: "... суть математики ... з'являється тепер як вчення про відношення між об'єктами, про які нічого не відомо крім опису їх деяких властивостей, саме тих, що як аксіоми покладені до основи теорії ...". Суттєвим у цьому визначенні є те, що усі факти довільної математичної теорії випливати з системи аксіом, покладених до її основи, тобто, інших джерел знання про властивості досліджуваних понять крім системи аксіом немає і відкрити новий факт в

[1] Проте, деякі математики та психологи – когнітологи вважають, що інтуїція може бути або функціональною, або предикативною (I.Shwank); або геометричною, або аналітичною (М.Кадець (приватна співбесіда)), в залежності від типів уявних моделей суб'єкта. З цих позицій висловлювання Ф.Енгельса набуває нового змісту.

математиці можна тільки доказом, що цей факт є наслідком прийнятої системи аксіом.

Можна навести ще багато інших визначень предмета математики, кожне з котрих відбиває деяку важливу сторону питання, але головне в усіх цих визначеннях є те, що математика - це єдина з наук, яка послідовно використовує аксіоматичний, або дедуктивний метод. Іншими словами, найголовніша відзнака математики від інших наук лежить у специфічному критерії істинності тверджень. У математиці - це виводимість їх з системи аксіом (критерій доказовості), в природознавчих, гуманітарних, або суспільних дисциплінах - це підтвердження їх на практиці (критерій суспільної практики).

Таким чином, при визначенні предмета математики не можна обійти стороною її метод. Предметом же математики є уся дійсність, усі її сторони, в цьому математика зовсім специфічна, бо її використовують усі інші науки, в цьому плані математика дійсно є "царицею наук", або "мовою науки".

Є навіть такі категоричні твердження, що кожна дисципліна є настільки наукою, наскільки їй вдається використовувати математику. В цьому є велика доля істини, тому що використання математики передбачає глибоку формалізацію понятійного апарату дисципліни, найбільш досконалою формою відбиття котрого є відповідна система аксіом. На останній факт можна подивитись і з іншого боку, з боку ступеня абстрактності понять різних наук: предметом конкретних наук є побудова моделей окремих аспектів дійсності, предметом математики - дослідження цих моделей, тобто побудова моделей цих моделей. У цій ієрархії вище математики знаходиться лише філософія. Можна наочно проілюструвати цю ієрархію за допомогою схеми, яку наведено вище.

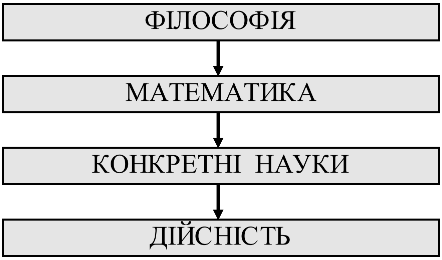


Рисунок 1

У зв’язку з цією схемою можна згадати глибоке висловлювання С.Банаха: "Математик - це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями; кращий математик той, хто встановлює аналогії доведень; сильніший математик той, хто помічає аналогії теорій; але можна уявити собі і такого, хто між аналогіями бачить аналогії.". Це твердження говорить також і про те, що ця ієрархія може бути деталізованою всередені самої математики.

Зауважимо також, що ця ієрархія не є ієрархією наук за їх значимістю або складністю - це є їх деяке упорядкування за предметом дослідження.

Глибоке дослідження місця та механізму дії аналогій у дослідницькому процесі (як науковому, так і навчальному) виконав S.Glynn.

Математика і практика

Треба зауважити також, що зовсім уникнути критерію практики в математиці неможливо. Це випливає безпосередньо з результатів, отриманих в логіці у 20 сторіччі - про це говорять видатні теореми К.Геделя про неповноту та несуперечливість формальних теорій.

Згідно з першою теоремою К.Геделя про неповноту, математика не може черпати знання тільки із самої себе, без звернення до практики. У кожній досить розвиненій теорії (яка містить в собі арифметику) можна сформулювати таке твердження, яке як воно само, так і його заперечення не можуть бути виведені з прийнятої системи аксіом. Тому сам дослідник має вирішити, яке з цих двох протилежних тверджень слід додати до системи аксіом для подальшого розвинення теорії. Вибір треба, звичайно, зробити так, щоб нова, поповнена система аксіом більш точно описувала дійсність (але мабуть для кожного із таких розгалуджень будуть існувати явища дійсності, які будуть моделюватися ними). Зрозуміло, на кожному такому кроці можна "розгалуджувати" теорії у процесі їх розвинення (наприклад, будується загальна геометрія на основі чотирьох аксіом Евкліда, потім геометрія розгалуджується на дві вітки: геометрія Евкліда та геометрія Лобачевського, у залежності приймається п'ятий постулат Евкліда, або його заперечення, далі кожна з цих геометрій з необхідністю буде подвоюватись, а вітки подвоюватись у свою чергу. Тобто можна буде говорити не про якусь одну геометрію, а про двоїчне дерево геометрій. Це досить накладно, тому, незважаючи на логічну бездоганність кожної з теорій, які отримуються на черговому кроці, більш природно обирати той варіант, який відповідає досліджуваній області. Це означає, що задачі побудови інтерпретацій теорій, практичне дослідження властивостей цих інтерпретацій є необхідними компонентами розвинення математичних теорій і їх не можна уникнути принципово.

Друга теорема К.Геделя про неповноту також свідчить про обмеженість аксіоматичного методу та потребу узгодження формальних теорій з практикою. Нагадаємо, що ця теорема говорить, що засобами розвиненої аксіоматичної теорії (тобто теорії, яка включає в себе арифметику), не можна довести несуперечливість цієї теорії. З цього скрутного становища математики виходять звичайно таким шляхом - доводять умовну несуперечливість теорії відносно арифметики, тобто доводять теорему: якщо несуперечлива арифметика, то й несуперечлива і дана теорія. Відносно ж арифметики вважається, що уся історія людства доводить несуперечливість арифметики своєю практикою на протязі тисячоліть (але ж все-таки практикою!). Тут, мабуть, влучно згадати добре відомі слова Кронекера, який сказав: "Бог створив арифметику, все останнє є діло рук людини". Зміст цього висловлювання можна тлумачити таким чином: якщо прийняти несуперечливість арифметики, то несуперечливість інших теорій можна довести дедуктивно.

Відносна несуперечливість теорії доводиться побудовою її інтерпретації (моделі) - системи її первісних об'єктів, для яких виконуються усі аксіоми теорії. У цьому випадку говорять про зводимість теорії до арифметики. Але це вдається не завжди: математичний аналіз не зводиться до арифметики, теорія множин не зводиться до математичного аналізу. Так що математики повинні постійно звертатися до практики як критерія несуперечливості теорії.

Глибока необхідна взаємодія математики з практикою лежить також в прийнятті тієї або іншої системи логічного виводу, аксіоми якої також відбивають найбільш загальні закони буття та мислення. Досить нагадати про інтуїціонізм та конструктивізм – дві вітки математики, які відрізняються, за суттю, тільки прийняттям або неприйняттям закону виключеного третього. Наскільки це важливе, стало зрозуміліше з винаходом та розповсюдженням комп'ютерів – тільки конструктивні результати можуть використовуватись для практичного розв'язку на комп'ютері.

На перший погляд може здаватися, що звертання до практики для математика, як необхідність, виникає у виняткових випадках, але це зовсім не так - у процесі побудови навіть самих абстрактних математичних теорій математик завжди має на увазі деяку більше або менше визначену область її подальшого використання (її інтерпретацію) і тому постійно звертається (свідомо або підсвідомо) до цієї області в процесі формування гіпотез, їх експериментальної перевірки або спростування. Таким чином, звертання до практики необхідно як з об'єктивної точки зору – логіки розвинення математичних теорій, так і з суб'єктивної – побудови інтерпретацій, які потрібні як джерело плідних ідей або контрприкладів до існуючих гіпотез. Для нашого подальшого це дуже важливо, тому ми повторимо і наголосимо: в процесі дослідження математик завжди має на увазі деяку інтерпретацію предметної області. Ця інтерпретація виконує для нього, з одного боку, роль джерела продуктивних ідей, а з другого боку - роль полігону для перевірки істинності своїх здогадів, а у подальшому - роль прикладення теорії.

Сформулюємо висновки

1. *Предметом дослідження математики є формальні структури* - *ідеальні об'єкти з деякими постульованими у вигляді аксіом властивостями (зокрема, такими структурами є абстрактні моделі різних аспектів дійсності, побудова яких складає предмет діяльності конкретних наук: природничих, суспільних, гуманітарних).*
2. *Методом математики є дедукція (тобто єдиним критерієм істинності тверджень у математиці є їх виводимість з прийнятої системи аксіом за законами математичної логіки).*
3. *Уникнути практики в математиці принципово неможливо* - *про це свідчать теореми К.Геделя про неповноту формальних теорій, згідно з якими практика є джерелом знань та критерієм несуперечності аксіоматичних теорій.*
4. *Математики у своїй творчій діяльності постійно використовують різні інтерпретації досліджуваної області для усвідомлення проблем, генерації плідних ідей щодо їх розв'язування, перевірки правильності одержаних результатів, побудови контрприкладів, використання отриманих результатів для розв'язку як внутрішніх математичних задач, пов'язаних з подальшим розвиненням математики, так і задач конкретних наук.*

Структура пізнавального процесу у математиці

Однією з найбільш поширених сучасних психологічних теорій пізнання є конструктивізм (або операціональна теорія), засновником якої вважають Ж.Піаже. Відображенням конструктивізму в дидактиці є конструктивний підхід у навчанні (зокрема, навчанні математиці). Метафорично конструктивний підхід до навчання можна сформулювати наступним чином:

Ніхто нікого ніколи нічому не може навчити. Навчатись можна тільки самостійно. Задача вчителя, школи, книги, комп'ютерної програми – створити обставини, які допомагають навчанню.

Згідно з конструктивізмом, процес пізнання складається з двох діалектично пов'язаних між собою процесів: асиміляції та акомодації. Стикаючись з новим явищем суб'єкт намагається його змоделювати за допомогою накопичених попередньо уявлень - з цього складається процес асиміляції (від латинського assimilatio - уподібнювання, ототожнення).

При цьому нові явища можуть увійти у суперечність з деякими уявленнями суб’єкта і тоді їх потрібно узгодити між собою, привести до системи попередні і нові уявлення - з цього складається процес акомодації (від латинського accomodatio - приноровлення, пристосування). За допомогою процесів асиміляції та акомодації здійснюється адаптація суб’єкта до зовнішнього середовища.

Вищою формою пізнання об’єкта суб’єктом є утворення суб’єктом операціональних структур, відповідних до об’єкта. Операціональною структурою (за Ж.Піаже) називається “внутрішня дія” суб’єкта, яка є генетично похідною від “зовнішньої”, предметної дії та скоординована з іншими “внутрішніми” діями. Іншими словами, вищою формою пізнання є побудова суб’єктом уявної моделі об’єкта.

Зауважимо, що конструктивістська теорія пізнання добре узгоджується з ідеями діяльнісного підходу у навчанні (краще говорити про діяльнісний підхід у вченні), з ідеями проблемного та розвиваючого навчання (ці теорії відбивають більш конкретні сторони методів реалізації конструктивного підходу в навчанні).

Рисунок 2

Загальний конструктивний підхід у навчанні у контексті математики має свою специфіку, яка обумовлена високим рівнем абстракції математичних понять, а також (і це головне) специфічним критерієм істинності. Про ці особливості математики достатньо говорилося нами раніш.

Математичне пізнання можна зобразити умовно за допомогою діаграми (рис. 2).

Ця діаграма цілком відповідає операційній теорії пізнання: перші три етапи конкретизують процес асиміляції, а четвертий - відповідає етапу акомодації. Зрозуміло, що в дійсності процес пізнання значно складніший ніж будь-які схеми, але діаграма все ж таки відбиває те коло питань, в якому "обертається" математична пізнавальна діяльність. Науково-дослідницьку діяльність у психологічному плані можна не відокремлювати від навчально-пізнавальної діяльності - вони близькі і відрізняються істотно тільки тим, що у першому випадку досліджується об’єктивно непізнане (при цьому нерідко це тільки здається дослідникові), а у другому випадку досліджується суб’єктивно непізнане. З точки зору психології дослідницька математична діяльність аналогічна дослідженню у довільній іншій області і є складним процесом (у тому числі і емоційним), який спирається на інтуїцію (уявні моделі), на складну діалектику раціонального та підсвідомого і тільки перевірку та оформлення математичні результати отримують у дедуктивній формі. Робити висновки щодо змісту процесу пізнання в математиці на основі аналізу тільки дедуктивної побудови математичних теорій неправомірно, бо, як образно зауважив Г.Вейль, "... творчий математичний процес так відноситься до дедуктивного викладення його результатів як жива істота до трупа...". Іншими словами, живий процес пошуку істини у математиці тільки завершується її дедуктивним викладенням, але це є, образно кажучи, "смерть" цього творчого процесу.

З цього випливає, що у навчанні математиці необхідно обов’язково розкривати не тільки дедуктивний, формально-логічний зміст навчального матеріалу, але і генезис математичних знань, діалектику математичного дослідження. Зробити це інакше ніж включаючи учнів до процесу пошуку математичних істин неможливо. Це важка умова, яка передусім вимагає того, щоб сам учитель мав власний досвід математичних досліджень, у протилежному випадку учбовий процес так чи інакше буде зводитись до вивчення готових результатів і буде "тиснути" своєю досконалою дедуктивною формою та браком відповідей на натуральні питання: "Звідки?" та "Для чого?".

Надзвичайна захопленість формальними методами у навчальному процесі змертвляє математику, залишаючи за кадром живий процес пошуку математичних істин - у кінцевому рахунку найбільш важливий у математиці. Особливо неприпустиме це на ранніх стадіях вивчення математики, коли евристичні міркування обов’язково повинні передувати формальним доказам. Нехтування цими принципами призводить до “кризи” математичної освіти (як вийшло, наприклад, з курсом геометрії у середній школі).

Учням необхідно створювати умови для самостійної побудови математики, спираючись на особисто значимі для них задачі, широко використовуючи асоціативне мислення, евристичний пошук на усіх етапах розв’язування задачі: усвідомлення змісту задачі, формування гіпотези відносно розв’язку задачі, доведення або спростування гіпотези на основі дедуктивного методу, включення отриманих результатів до системи знань. Навчальний процес повинен бути відбиттям творчого дослідницького процесу.

Як було кимось справедливо зауважено, в наші часи роль учителя у навчальному процесі радикально змінилася від вісника істин з кафедри до провідника, співшукача математичних істин, діючого поруч із своїми студентами ("The role of a teacher dramatically changed nowadays from the sage at the stage to the guide by the side"). Вірогідно, це відбиває загальний демократичний та гуманістичний процес розвитку суспільства (вирівняли у правах усі раси, нації, статі, часи (минулі, сьогодення, прийдешні), віки (у нашому випадку – дитинство). Хто та що далі буде емансиповано? Примати, звіри, рослини, природа, ...? Людство повинно було пройти великий шлях самовдосконалення, щоб зрозуміти, що особистість дитини така ж складна, значуща та заслуговує на повагу як і особистість дорослої людини (зрозуміло, для цього треба було досягти високого рівня матеріального розвитку, щоб на перший план вийшли духовні проблеми). Разом із тим людству треба було зрозуміти обмеженість своїх знань та розуміння природи, відчути гармонійність, досконалість та взаємозалежність усього сущого щоб відчути себе "дітьми у Едемі".

Як колись сформулював критерій розвиненості людини Л.Толстой - це є легкість, з якою вона каже фразу: "Я цього не знаю".

Зауважимо, що все попереднє відносилося до математичної діяльності з об’єктивістської точки зору. З точки зору особистості, математична творчість багато в чому сходна з творчим процесом у будь-якій іншій області, містить у собі багато незрозумілого. Наведемо декілька тверджень з концепції математики з суб'єктивістської точки зору, які можна знайти різних авторів (див., наприклад, Zimmerman, Lakatos, Lindgvist).

1. *Математичний зміст важливіший за математичний формалізм.*
2. *Процес математичного мислення не менш важливий, ніж сам математичний результат.*
3. *Красивий математичний результат характеризується не відсутністю помилок, а значимістю його ідей.*
4. *Наголошуючи на строгості математичних доведень треба брати до уваги рівень розвитку учнів.*
5. *Ігровий та естетичний аспекти математики повинні завжди наголошуватись.*
6. *Займаючись математикою важливо мати свій розум "відкритим", оскільки інші предмети та застосування від математики невідокремлені.*
7. *Математику треба розуміти як сіткову систему, яка сама є часткою більш широкої сіткової системи відбиваючої все життя (як наслідок, продуктивним є гнучке та сіткоподібне мислення).*
8. *Роль логіки в математиці аналогічна ролі граматики у письменстві.*
9. *Значення математичної символіки більш значуще ніж просто символьне викладення результатів.*

Аналогічні ідеї виражені і в матеріалах NCTM (Національна Рада Вчителів Математики США).

Наприкінці все ж таки наголосимо, що при всьому розмаїтті підходів до пошуку математичних результатів, до математичного навчання, при всьому розмаїтті уявного моделювання математичних результатів, критерій істинності в математиці один і незмінний – це дедуктивне доведення.

Можливості підтримки пізнавальної математичної діяльності засобами інформаційних технологій.

Спираючись на наведену вище структуру пізнавального процесу у математиці розглянемо питання можливості його підтримки засобами інформаційних технологій. На перший погляд, тут питання немає - вже розроблені десятки якщо не сотні професійних математичних комерційних пакетів (їх купують, значить, вони використовуються), міжнародна телекомунікаційна мережа EUROMATH об'єднує тисячі математиків світу. Проте, це ще не відповідь на питання, тому що ще треба проаналізувати, які функції виконують ці пакети, може тільки другорядні, технічні, аналогічні друкарській машинці або телефону.

Дійсно, інтелектуальні можливості автоматичних систем в математиці обмежені перш за все теоремою А.Чорча про алгоритмічну нерозрішимість логіки першого порядку (тобто немає алгоритму, за котрим можна було б перевірити тотожність двох предикатів). Як наслідок – алгоритмічно нерозрішима задача пошуку доведень теорем. Тобто замінити математика автоматом на етапі доказу теорем принципово неможливо, принаймні автоматом, еквівалентним машині Тьюрінга. Разом із тим, нагадаємо, що відкритий Ербраном алгоритм все ж таки дозволяє знаходити доведення істинних теорем логіки першого порядку (тобто, якщо наперед відомо, що теорема справедлива, то її доведення за цим алгоритмом можна автоматично знайти, хоча не можна зробити ніяких оцінок зверху відносно необхідного для цього часу). Так що навіть у питанні автоматичного доведення теорем можливий прогрес навіть для комп'ютерів звичайної архітектури, не кажучи про можливість винаходу нових типів архітектури комп'ютерів, які можуть сприяти позитивним змінам у цій області. Зауважимо, що з емоційної точки зору теорема А.Чорча дуже втішна для людини - алгоритмів для доказу теорем не існує, але математики їх доводять. Проте, це, вірогідно, свідчить не стільки про трансцендентальність процесів знаходження доказів теорем, а про обмеженості моделювання цих процесів за допомогою машин Тьюрінга.

Повернемося до схеми пізнавального процесу, наведеній у попередньому параграфі. Сказане у попередньому абзаці відноситься тільки до третього блоку діаграми, причому тільки до першої частини його. Друга частина цього блоку - побудова контрприкладів до гіпотез психологічно невідокремлюва для математика від пошука їх доведення. Міркування в процесі пошуку доведення якогось твердження будуються звичайно за такою схемою: вихідний силогізм A=>B замінюється ланцюжком силогізмів A=>A1=>A2=>...=>AN =>B, одні з яких - це відомі, доведені твердження (теореми), а інші потребують доведення. Ця заміна робиться здебільшого інтуїтивно, спираючись на внутрішнє почуття доцільності цієї заміни (що доведення нових силогізмів буде простішим ніж доведення вихідного) твердження. Для кожного нового силогізму процес може повторюватись і, кінець кінцем, або вдасться звести вихідну теорему до вже відомих тверджень, або одне чи декілька тверджень необхідно буде доводити "безпосередньо". Слово "безпосередньо" ми поставили у лапки тому, що математик майже ніколи не продовжує доведення теорем до зведення їх до аксіом теорії, як правило доведення завершується на якомусь рівні цього зведення, після чого дослідник може сказати собі, що залишилися тільки питання технічного характеру. Процес доведення теореми таким чином принаймні на деяких його етапах є експериментування в області тотожних перетворень аналітичних виразів. При цьому, у кожного математика є свій світ математики, в якому знаходяться аксіоми, доведені та засвоєні ним твердження (засвоєні - означає змодельовані за допомогою внутрішніх уявних моделей) та чуттєвий світ здогадів, які мають той чи інший ступінь правдоподібності[1]. Досліджуючи деяке твердження яке не вдається звести безпосередньо до вже відомих, математик починає використовувати гіпотетичні твердження (тобто твердження які мають деякий ступінь вірогідності, але поки що не доведені). Справедливість такого гіпотетичного твердження математик звичайно починає перевіряти спочатку на простих прикладах, а потім більш складних з тим, щоб або спростувати це твердження побудовою контрприкладу або знову звести його до нового ланцюжка силогізмів які потребують доведення. Іншими словами, процеси пошуку доведень теорем і побудови контрприкладів дійсно невідокремлювані один від одного.

Підсумовуючи вищесказане, наголосимо, що як пошук нових математичних результатів, так і пошук їх доведення спираються на експериментування з математичними об'єктами. Як наслідок, інструменти, які можуть зробити ці експерименти більш ефективними, зроблять більш ефективною професійну математичну роботу.

---

[1] Питання ролі системи уявлень вчителів, учнів, студентів про математику у ефективності процесу навчання (believes in Math) є актуальним предметом досліджень у сучасній дидактиці математики.

Приклад комплексного використання інформаційних технологій у математичних дослідженнях[1]

У наш час так багато надруковано матеріалів як за, так і проти використання інформаційних технологій у математичних дослідженнях та навчанні математиці, що вони мало на кого можуть справити враження. Тому особливу значимість мають приклади ефективного їх використання, що ми і спробуємо зробити.

Цей приклад складається з експериментів у комп'ютерному середовищі Cabri-Geometer з однією добре відомою геометричною задачею, які приводять до формування гіпотези щодо її узагальнення, яке потім доводиться засобами комп'ютерної алгебри пакета Derive. На протязі двох років студентам фізико-математичного факультету Харківського педагогічного університету пропонувалася ця задача як тема навчального дослідження на 2-тижневій комп'ютерній практиці, програма якої передбачала спочатку знайомство з можливостями пакетів Cabri-Geometer та Derive під керівництвом викладача з наступною самостійною роботою. Кращі студенти самостійно виконали дослідження і були у захваті від цієї роботи. Нижче ми обговоримо не тільки саму задачу, але й ту роботу з пакетами, яка забезпечила її розв'язок.

Задача

Дано два квадрати $A_1QC_1D_1$ та $A_2B_2C_2Q$ з центрами O_1 та O_2, та спільною вершиною Q та однакової орієнтації. Позначимо літерами E та F середини відрізків A_1A_2 та C_1C_2. Довести, що чотирикутник O_1EO_2F також є квадрат.

Як цю теорему можна узагальнити?

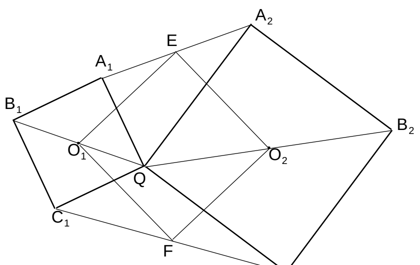
Опишемо експерименти по даній задачі.

Експеримент 1

Спочатку сконструюємо комп'ютерну модель для першої частини задачі у середовищі Cabri-Geometer. З цією метою спочатку сконструюємо макрос Quadrate, який будує квадрат за двома точками як кінцями діагоналі.

Конструюємо комп'ютерну **Model 1** задачі:

1. Сконструюємо макроконструкцію *Quadrate*, яка будує квадрат за двома точками як за кінцями діагоналі квадрата.
2. Оголосимо точки D_1, Q та B_2, після чого побудуємо квадрати $A_1QC_1D_1$ та $A_2B_2C_2Q$ за допомогою макроконструкції Quadrate, використовуючи пари точок D_1, Q та Q, B_2 як кінці їх діагоналей.
3. Побудуємо відрізки A_1A_2, QB_2, C_1C_2, D_1Q.
4. Визначимо точки E, O_2, F, O_1 як середини відрізків, які були побудовані на попередньому кроці 3.



Тепер модель готова і ми можемо експериментувати з нею. Дійсно, наша модель є динамічною («живою») у тому розумінні, що ми можемо динамічно змінювати її параметри. Усі вихідні точки *(D_1, Q*

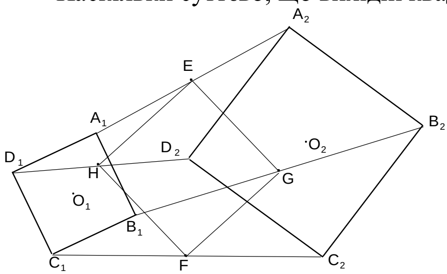
---

[1] Результати цього параграфа були отримані спільно з Горохом В.П. і докладалися на міжнародних конференціях [3], [4].

та B_2) є рухомі – їх можна перетаскувати з місця на місто за допомогою миші, при цьому будуть перебудовуватися квадрати, середні точки згідно з алгоритмом їх начальної побудови. “Граючі” з цією моделлю ми можемо наочно впевнитися, що третій (залежний) чотирикутник завжди буде квадратом (у цьому можна впевнитися не тільки візуально, але й за допомогою умонтованих в *Cabri-Geometer* інструментів – лінійки та транспортира, причому значення довжин та кутів також може динамічно виводитись на екран). Зрозуміло, що проведені експерименти не є доказом того, що результуючий чотирикутник є квадратом, поки що це є тільки як гіпотеза, але гіпотеза високого ступеня вірогідності – комп’ютерні експерименти було проведено з великою кількістю різних початкових умов. Поки що ми оставимо осторонь дедуктивне доведення і продовжимо комп’ютерні експерименти.

Експеримент 2 (роз’єднання вершин)

Наскільки суттєво, що вихідні квадрати мають спільну вершину?



Нажаль, попередня модель не може бути модифікованою для проведення відповідних експериментів. Тому повторимо попередні побудови з маленькими змінами на другому кроці – за вихідні точки треба взяти чотири незалежні точки B_1, D_1, B_2, D_2, які будуть виконувати функції кінців діагоналей вихідних квадратів.

Після експериментів з новою моделлю **Model 2** ми можемо впевнитися, що результуючий чотирикутник також буде квадратом. Як наслідок цих експериментів можна сформулювати наступну гіпотезу:

Узагальнення 1

Дано два квадрати $A_1B_1C_1D_1$ та $A_2B_2C_2D_2$ з центрами у точках O_1 та O_2, тотожньої орієнтації. Позначимо літерами *E, F, G, H* середини відрізків A_1A_2,, B_1B_2, C_1C_2 , D_1D_2 . Тоді чотирикутник *EFGH* є також квадратом.

Експеримент 3 (зміна відношення, в якому діляться відрізки)

Чи можна змінити положення вершин результуючого чотирикутника на відрізках, які поєднують вершини вихідних квадратів?

Модифікуємо попередню модель. Для цих побудов нам підготуємо іншу макроконструкцію, яку назвемо Divide і яка ділить відрізок у відношенні, що визначається відрізком та точкою на ньому. Такий макрос може бути визначеним на основі теореми Фалеса. Після цього модифікуємо конструкцію моделі **Model 3** за допомогою цього макросу, вибираючи довільну точку *E* на відрізку A_1A_2**,** а потім будуючи точки *F, G, H* за допомогою макросу *Divide* як точки, що ділять відповідні відрізки у тому ж відношенні.

Тепер ми взмозі за допомогою руху миші змінювати розміри вихідних квадратів, їх взаємне положення, а також положення точки поділу відрізка A_1A_2. Як і у попередніх випадках, результуючий чотирикутник завжди залишатиметься квадратом. Таким чином, ми отримуємо наступне узагальнення.

Узагальнення 2

Дано два квадрати $A_1B_1C_1D_1$ та $A_2B_2C_2D_2$ з центрами в точках O_1 та O_2, які мають однакову орієнтацію. Позначимо літерами A_2, B_2, C_2 та D_2 точки відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 та D_1D_2 відповідно, які ділять їх в одному й тому ж відношенні. Тоді чотирикутник *EGFH* також є квадрат.

Доведення гіпотези 3 у середовищі пакету Derive

Доведемо узагальнення 2 за допомогою *Derive*.

Позначимо координати центрів O_1 та O_2 квадратів $A_1B_1C_1D_1$ і $A_2B_2C_2D_2$ через *(a, b)* та *(c, d)* відповідно. Введемо також у розгляд вектори $n_1 = O_1A_1$ та $n_2 = O_2A_2$,, їх координати позначимо відповідно через *(p , q)* та *(r , s)*.

Оголосимо вектор константи у пакеті *Derive* (для чого використаємо команди *Declare* та *Constant*):

$O_1 := [a, b]$; $O_2 := [c, d]$; $n_1 := [p, q]$; $m_1 := [-q, p]$; $n_2 := [r, s]$; $m_2 := [-s, r]$.

Виразимо координати вершин квадрату через введені вектори (для чого використаємо ти ж самі команди *Declare* та *Constant*):

$A_1 := O_1 + n_1$; $B_1 := O_1 + m_1$; $C_1 := O_1 - n_1$; $D_1 := O_1 - m_1$; $A_2 := O_2 + n_2$;
$B_2 := O_2 + m_2$; $D_2 := O_2 - m_2$; $C_2 := O_2 - n_2$;

Оголосимо допоміжну функцію *Divide,* яка повертає вектор координат точки, що ділить відрізок між двома даними точками *x* та *y* заданому відношенні *t*:

Divide (x , y , t) : = (x + ty) / (1 + t).

Виразимо координати точок *E, G, F, H*, які ділять відрізки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 у відношенні $t : 1$:

E:= Divide (A_1, A_2, t); *G:= Divide* (B_1, B_2, t);
F:= Divide (C_1, C_2, t); *H:= Divide* (D_1, D_2, t).

Виразимо різницю векторів *HE - FG:*

(E - H) - (G - F).

Спростимо отриманий вираз (команда *Simplify*)**:**

[0, 0].

Таким чином, ми довели (за допомогою символьних перетворень, які було виконано на комп’ютері!), що чотирикутник *EGFH* є паралелограм.

Обчислимо величину скалярного добутку векторів *FG* та *GE*, для чого введемо у авторському режимі вираз *(G - F).(E - G)* і спростимо його за допомогою команди *Simplify.* Результат спрощення дає нуль. Тим самим ми довели, що паралелограм *EGFH* є прямокутник.

Порівняємо довжини сторін *FG* та *GE* цього прямокутника. З цією метою оголосимо нову функцію *SModV* (**S**quare of the **Mod**ule of the **V**ector):

SModV(x): = x.x

Обчислимо різницю: *SModV(G - F) - SModV(E - G)*. Спрощення цього виразу також дає нуль. Це доводить, що чотирикутник *EGFH* є квадрат. Слід зауважити, що квадрат *EGFH* може вироджуватись у точку.

Подальші узагальнення

Експерименти з довільними подібними многокутниками (перш за все трикутниками)[1] дозволяють сформулювати наступне узагальнення:

---

[1] Заради справедливості треба зауважити, що для побудови відповідного експерименту у середовищі пакета Cabri треба проявити досить багато винахідництва. На наш погляд, розробникам пакета можна було б суттєво

Теорема 1(Узагальнення 3)

Припустимо, що F_1 та F_2 є дві подібні фігури площини однакової орієнтації. Це означає, що існує перетворення подібності першого класу (визначник якого невід'ємний), яке перетворює фігуру F_1 у фігуру F_2. Для кожної точки X_1 фігури F_1 та точки $X_2=f(X_1)$ фігури F_2 визначимо точку X, котра ділить відрізок X_1X_2 у відношенні t $(X_1X : XX_2 = t)$. Тоді фігура F, яка утворена усіма такими точками X, подібна до двох вихідних фігур або складається з однієї точки.

Доведення гіпотези

Радіус-вектор точки, яка позначена літерою *M* будемо у подальшому позначати тією ж літерою з рискою над нею.

Розглянемо дві довільні точки X_1 та Y_1 фігури F_1. Позначимо через X_2 та Y_2 їх образи при відображенні f: $X_2 = f(X_1)$ *and* $Y_2 = f(Y_1)$.

Позначимо через X та Y точкі, які ділять відрізки X_1X_2 та Y_1Y_2 у відношен-
ні t.

Тоді будемо мати:

$$\overline{X} = (\overline{X}_1 + t\overline{X}_2) / (1 + t),$$
$$\overline{Y} = (\overline{Y}_1 + t\overline{Y}_2) / (1 + t).$$

Як наслідок отримаємо співвідношення $\overline{XY} = (\overline{X_1Y_1} + t\overline{X_2Y_2})/(1+t)$.

Таким чином отримаємо:

$$\left|\overline{XY}\right|^2 = (\overline{X_1Y_1}^2 + 2t\overline{X_1Y_1}.\overline{X_2Y_2} + t^2\overline{X_2Y_2}^2)/(1+t)^2.$$

Позначимо через φ кут між променями X_1Y_1 та його образом при подібності f. Кут φ є постійним, оскільки відображення f є подібністю першого класу. Враховуючи співвідношення $|X_2Y_2| = k|X_1Y_1|_1$, де через k позначено коефіцієнт подібності, ми отримуємо:

$$\left|\overline{XY}\right|^2 = \frac{1 + 2tk \qquad \cos\varphi + t^2k^2}{(1+t)^2}|X_1Y_1|^2.$$

Тобто, $|XY| = C|X_1Y_1|$, де C є константою.

Таким чином, ми довели, що фігура F подібна до фігури F_1 з коефіцієнтом подібності C, якщо $C > 0$, у випадку коли $C=0$ фігура F вироджується у точку.

Відмітимо, що у найбільш загальному випадку (Узагальнення 3) доведення було проведено без допомоги комп'ютера, більш за те, було більш просте та природно. Це досить типова ситуація, коли з загальної точки зору несуттєві деталі зникають із поля зору, а суть проблеми стає більш ясною та наочною. Незважаючи на це, комп'ютерні експерименти грали суттєву роль у процесі узагальнення. Зауважимо також, що і в останньому випадку доведення може бути проведеним у середовищі Derive, але усі аналітичні перетворення були настільки прості, що допомога комп'ютера виявилася непотрібною.

розвивати пакет у напрямку підтримки концепції геометричних фігур (яких на екрані може бути довільна кількість) та їх перетворень.

Останні зауваження

Як це з наочністю видно з наведеного вище доведення, результат залишається справедливим у випадку довільної розмірності (не тільки у випадку *2D*, але й *3D, 4D*, довільної скінченої і навіть нескінченної розмірності). Отриманий результат можна використовувати у комп'ютерній анімації для моделювання неперервних перетворень геометричних об'єктів на площині або у просторі.

Інші задачі

У цьому параграфі ми обговоримо декілька інших нових результатів (з нашої точки зору), які були відкриті нами як результат експериментів у середовищі Cabri з наступним аналітичним доведенням у пакеті Derive за тією ж схемою як і у попередній задачі. Деталі цих експериментів і доведень ми наводити не будемо – їх методологія та техніка аналогічні використанню пакетів у обговореній задачі.

Теорема 2

Дано три правильні трикутники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ та $A_3B_3C_3$ однієї орієнтації. Позначимо через P,Q,R середні точки відрізків C_1B_2, C_2B_3 та C_3B_1 відповідно. Тоді трикутник PQR є також правильним тоді і тільки тоді, коли трикутник $A_1A_2A_3$ правильний.

Зауваження 1

Необхідна частина Теореми 1 добре відома (див., наприклад, [2], p. 100), достатня частина, наскільки відомо авторам, нова.

Теорема 2

Дано два правильні трикутники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ однакової орієнтації. Правильні трикутники $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ та $C_1C_2C_3$ однакової орієнтації побудовано на відрізках A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 відповідно. Тоді трикутник $A_3B_3C_3$ також правильний.

Зауваження 2

Як легко побачити, дві останні теореми є часткові випадки наступної теореми, котра також було доведено засобами пакета Derive у загальному вигляді.

Теорема 4

Дано n правильних m-кутників однакової орієнтації на площині: $A_1^1A_1^2\dots A_1^m$, ... , $A_n^1A_n^2\dots A_n^m$. Тоді, якщо два n-кутники $A_1^1A_2^1\dots A_n^1$ and $A_1^2A_2^2\dots A_n^2$ правильні, то і всі останні n-кутники $A_1^iA_2^i\dots A_n^i\,(i=3,4,\dots,m)$ також правильні.

Висновки

1. Інформаційні технології підвищують ефективність роботи математика практично в усіх видах його діяльності:

   1.1 Технічній (підготовка публікацій, рутинні розрахунки, ...)

   1.2 Комунікативній (електронна пошта, електронні дошки об'яв, телеконференції, Інтернет - спільноти (ICQ), спілкування у реальному масштабі часу (Chat), пошукові системи (Internet Online), електронні видання (книги, журнали, матеріали конференцій)

   1.3 Творчій (комп'ютерні експерименти з метою відкриття нових закономірностей, полуавтоматичне доведення теорем засобами комп'ютерної алгебри, побудова прикладів та контрприкладів)

2. Не треба протиставляти математика і комп'ютер: майбутнє за "симбіозом математика та комп'ютера": і комп'ютер і людина мають свої недоліки та свої переваги.

3. Найбільш перспективними з точки зору підтримки творчої математичної діяльності є:

3.1 **пакети комп'ютерного моделювання**, особливо пакети оздоблені гнучкими можливостями візуалізації цих моделей та інтерактивними засобами маніпулювання геометричними образами (в силу "геометричності" інтуїції більшості людей). Ці пакети забезпечують дослідника виконувати комп'ютерні експерименти з метою пошуку математичних закономірностей (маніпулювання прикладами – інтерпретаціями задачі) , або для побудови контрприкладів з метою спростування невірних тверджень.

3.2 **пакети комп'ютерної алгебри (CAS)**, які використовуються здебільшого для тотожних перетворень символьних виразів. CAS можуть використовуватись як для експериментування з символьними моделями досліджуваної області, так і для комп'ютерної підтримки процесу дедуктивного доведення теорем.

4. Використання інформаційних технологій у математичній діяльності дає дослідникові нові потужні можливості дослідження, але передбачають високу математичну і інформаційну культуру, яка необхідна як для перекладення проблеми на мову комп'ютера, так і розуміння особливостей дискретного моделювання неперервних та нескінченних об'єктів, границі комп'ютерного моделювання, обумовлених ефективністю алгоритмів, що використовуються, та алгоритмічною розрішимістю та нерозрішимістю задач.

5. Використання інформаційних технологій у математичних дослідженнях, незважаючи на незмінність предмету і методу математики, мають свою специфіку, для засвоєння якої потрібні сумісні зусилля розробників пакетів, математиків-професіоналів та математиків-освітян по розробці та вдосконаленню пакетів, підготовці інтегрованих посібників з різних розділів математики, орієнтованих на систематичне та ефективне використання інформаційних технологій. На особливу увагу заслуговують універсальні пакети, призначені як для комп'ютерного моделювання з потужними засобами візуалізації та маніпулювання образами на основі як точних, так і наближених обчислень, так і для виконання символьних обчислень і які, крім того, оздоблені широким спектром функцій для підтримки навчання та самонавчання (розвинута система допомоги, можливість організації тренінгу та контролю, моніторингу роботи і т.п.). При цьому одні й ті ж пакети повинні бути придатними для усіх категорій користувачів від першокласника до професіонала математика – пакет повинен адаптуватися до рівня користувача.

Література

1. Болтянский В.Г., Об одном паркете, Математика в школе, 1984, ? 1, p.65-66.
2. Скопец З.А., Геометрические миниатюры, Москва, «Просвещение», 1990, 224p.
3. Rakov S.A., Gorokh V.P., Explorations in Plane Geometry in Cabri and Derive Environment, p.p.511- 518, Vortrage auf der 32. Tagung fur Didaktik der Mathematik, Munchen, 1998
4. Rakov S.A., Gorokh V.P., Courseware in Geometry (Elementary, Analytic, Differential), Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematical Education, vol.1, pp. 274 – 285, Osnabruck, 1999