І.В. Жовтяк
ВДПУ ім. М.Коцюбинського, м. Вінниця

Використання нечітких множин для оцінювання значень дидактичних показників

У статті розглядається підхід до оцінювання знань на основі нечітких множин. Пропонується розв'язок проблеми співставлення знань об'єктів навчання з керуючими вказівками та рекомендаціями щодо подальшого вивчення матеріалу шляхом використання нечітких змінних.

Основні означення

Нечіткою змінною називають трійку $<\alpha, X, \widetilde{C}(\alpha)>$, де $\alpha \in \mathrm{A}$ - назва нечіткої змінної, X - область її визначення (базова множина), $\widetilde{C}(\alpha) = \{<\mu_\alpha(x) \mid x \in X>\}$ - нечітка множина, яка описує обмеження на можливі значення нечіткої змінної.

Лінгвістичною змінною називається набір $<\beta, \mathrm{A}(\beta), X, G, M>$, де $\beta \in \mathrm{B}$ - назва лінгвістичної змінної; $\mathrm{A}(\beta)$ - множина значень змінної, кожне з яких є нечіткою змінною з областю визначення X ; G - синтаксичне правило (найчастіше у формі граматики), яке породжує найменування $\alpha \in \mathrm{A}(\beta)$ значень змінної; M - семантичне правило, яке ставить у відповідність нечіткій змінній з назвою $\alpha \in A(\beta)$ нечітку множину $\widetilde{C}(\alpha)$ (зміст нечіткої множини) [1].

Нечіткою оцінкою об'єкта навчання *u* за дидактичним показником β назвемо нечітку множину:

$$\widetilde{\varphi}(u) = \{\mu_\alpha(x(u)) \mid \alpha \in \mathrm{A}\}, \tag{1}$$

де *x(u)* – результат тестування об'єкта *u* за показником β.

Лінгвістична змінна задається на деякій кількісній базовій шкалі та приймає значення, які є словами або словосполученнями природної мови. Значення лінгвістичної змінної описуються нечіткими змінними. Покажемо, як за допомогою лінгвістичних змінних формалізувати інформацію про об'єкт навчання, представлену в словесній формі.

Побудова функцій належності для дидактичних показників

Вважатимемо, що оцінка рівня засвоєння навчального матеріалу здійснюється за значеннями показників β_1 =*"Впізнавання"*, β_2 =*"Відображення"*, β_3 =*"Розуміння"*, β_4 =*"Застосування"*, β_5 =*"Творчість"*[2]. Позначимо *B*=*{* β_1 , β_2 , β_3 , β_4 , β_5 *}*. Значення кожного з показників оцінюватимемо в термінах *"незадовільно", "задовільно", "добре", "відмінно"*. Отже, $\alpha \in \mathrm{A} =$ { *"незадовільно", "задовільно", "добре", "відмінно"*}. Як приклад, розглянемо формалізацію опису показника *"Розуміння"*. Для цього використаємо лінгвістичну змінну *<"Розуміння",* $\mathrm{A}(\beta)$, *X*=$\{0,1,\ldots,P\}$*>*, де $\beta \in B$ - елемент множини назв показників, $\mathrm{A}(\beta)$ =*{"незадовільно", "задовільно", "добре", "відмінно"}* – множина нечітких значень лінгвістичної змінної, P - загальна кількість суттєвих операцій у тесті, який використовується при оцінюванні, $X=\{0,1,...,P\}$ - базова множина. Під суттєвими розуміють ті операції, які виконуються на рівні, який перевіряється. Операції нижчих рівнів, до числа суттєвих не входять.

Значення лінгвістичної змінної *"Розуміння"* із множини $A(\beta)$ описуються нечіткими змінними з відповідними назвами. Для опису нечітких змінних використовуються нечіткі множини та функції належності.

Для побудови функцій належності використовують прямі та непрямі методи [3]. У прямих методах степені належності елементів множини X безпосередньо задаються одним експертом або групою. Найпростіше функція належності будується для одного експерта. У такому випадку кожному елементу множини X ставиться у відповідність ступінь належності $\mu_\alpha(x)$, яка з точки зору експерта найкращим чином узгоджується зі змістом нечіткої змінної із множиною $\tilde{C}(\alpha)$. Відповідність між степенями належності та елементами множини X може задаватися в табличному, графічному або аналітичному вигляді.

Більш точніші непрямі методи[1,3]. Значення функції належності для елементів множини X знаходяться шляхом експертного порівняння степенів належності елемента $x_i \in X$ нечіткій множині $\tilde{C}(\alpha)$. В методі попарного порівняння, наприклад, здійснюється опитування експерта про те, наскільки, із його точки зору, елемент x_i точніше за елемент x_j відповідає поняттю α. Припускають, що значення $\mu_\alpha(x_i) = r_i$, тоді матриця попарних порівнянь має наступний вигляд:

$$\mathbf{M} = \begin{Vmatrix} \frac{r_1}{r_1} & \frac{r_1}{r_2} & \frac{r_1}{r_3} & \cdots & \frac{r_1}{r_n} \\ \frac{r_2}{r_1} & \frac{r_2}{r_2} & \frac{r_2}{r_3} & \cdots & \frac{r_2}{r_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{r_n}{r_1} & \frac{r_n}{r_2} & \frac{r_n}{r_3} & \cdots & \frac{r_n}{r_n} \end{Vmatrix}$$

В роботі [1] показано, що вектор $r=(r_1,r_2,...,r_n)$ є тим нормованим власним вектором матриці, який відповідає найбільшому власному числу.

Розглянемо приклад.

Нехай для оцінки рівня засвоєння матеріалу використовується тест, який містить 20 завдань. Необхідно побудувати функції належності для нечітких змінних

$<$"*незадовільно*"$,X,\tilde{C}>$, $<$"*задовільно*"$,X,\tilde{C}>$, $<$"*добре*"$,X,\tilde{C}>$, $<$"*відмінно*"$,X,\tilde{C}>$.

Опитуванням експертів отримано наступну порівняльну таблицю значень функції належності нечіткої змінної $<$"*незадовільно*"$,X,\tilde{C}>$

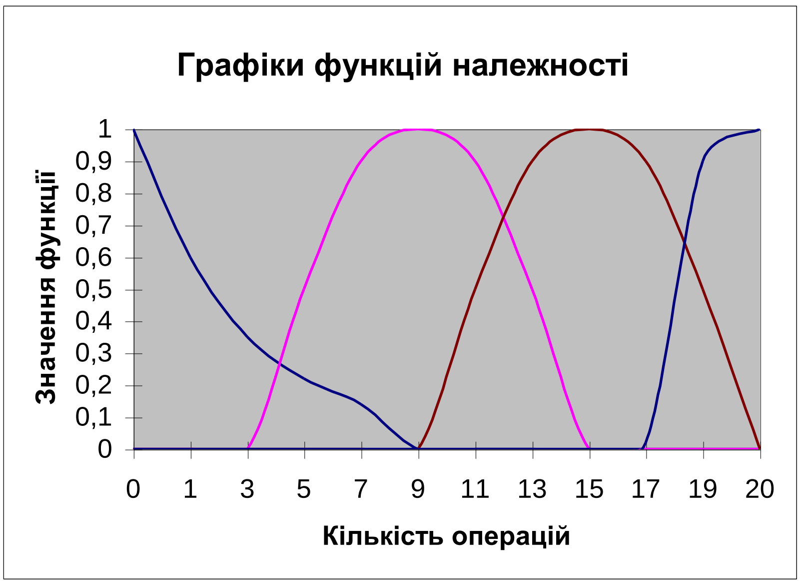
	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	20
0	1	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	20
1	0,5	1	2	3	5	7	9	11	13	15	17	19
3	0,33	0,5	1	2	3	5	7	9	11	13	15	17
5	0,2	0,33	0,5	1	2	3	5	7	9	11	13	15
7	0,16	0,2	0,33	0,5	1	2	3	5	7	9	11	13
9	0,11	0,16	0,2	0,33	0,5	1	2	3	5	7	9	11
11	0,09	0,11	0,16	0,2	0,33	0,5	1	2	3	5	7	9
13	0,077	0,09	0,11	0,16	0,2	0,33	0,5	1	2	3	5	7
15	0,067	0,077	0,09	0,11	0,16	0,2	0,33	0,5	1	2	3	5
17	0,059	0,067	0,077	0,09	0,11	0,16	0,2	0,33	0,5	1	2	3
19	0,053	0,059	0,067	0,077	0,09	0,11	0,16	0,2	0,33	0,5	1	2
20	0,05	0,053	0,059	0,067	0,077	0,09	0,11	0,16	0,2	0,33	0,5	1
Власний Вектор	0,37	0,22	0,13	0,08	0,05	0,035	0,025	0,019	0,015	0,012	0,01	0,008
$\mu_{C(\alpha)}(x_i)$	1	0,6	0,35	0,22	0,14	0,1	0,07	0,05	0,04	0,032	0,027	0,02

Приймемо значення менші 0.1 рівними нулю, тоді отримуємо нечітку множину $\tilde{C}$ *(“незадовільно”)={<1/0>,<0.6/1>,<0.35/3>,<0.22/7>,<0.14/9>,<0/11>,<0/15>,<0/17>,<0/1>,<0/20>}.*

Аналогічно будуються порівняльні таблиці значень функцій належності для інших показників та нечіткі множини для інших змінних. Наступна таблиця містить значення функцій належності всіх змінних прикладу.

	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	20
“незадов.”	1	0,6	0,35	0,22	0,14	0	0	0	0	0	0	0
“задовільно”	0	0	0	0,5	0,9	1	0,9	0,5	0	0	0	0
“добре”	0	0	0	0	0	0	0,5	0,9	1	0,9	0,5	0
“відмінно”	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,02	0,9	1

Функції належності зручно представляти у вигляді графіків:



В роботі [3], пропонується методика побудови функцій належності на основі стандартного набору аналітичних функцій. В нашому випадку значення функції належності можна інтерполювати квадратичною або експоненціальною функцією.

Поняття нечіткої ситуації

Для моделювання процесу навчання використаємо методи ситуаційного управління. Задачею навчання вважатимемо оцінку стану об'єкта навчання та повідомлення йому в необхідній формі вказівок та рекомендацій щодо подальшого вивчення матеріалу. Стан об'єкта навчання будемо оцінювати за значеннями дидактичних показників.

Означення 1. Ситуацією у вивченні певного елемента знань будемо називати результат оцінювання за дидактичними показниками знань цього елемента об'єктом навчання.

Один із способів співставлення значень дидактичних показників із навчальними рекомендаціями та вказівками полягає в побудові "керуючої таблиці", яка зіставляє кожній з можливих ситуацій певне керуюче рішення. Розмір таблиці визначається числом ситуацій, яке у свою чергу залежить від кількості значень показників. Якщо $B=\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p\}$ – показники, а m_1, m_2, ..., m_p – число значень відповідного показника, то число можливих ситуацій не перевищує $m_1 \times m_2 \times ... \times m_p$.

У розглянутому прикладі для оцінки рівня засвоєння навчального матеріалу використовувались п'ять показників, значення кожного оцінювались за кількістю правильно виконаних операцій. В кожному тесті оцінювались результати двадцяти операцій, тому число можливих ситуацій дорівнює $n=20 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20=3200000$. Отже, при такому оцінюванні результатів виконання тесту можливе отримання великої кількості надлишкових ситуацій. Разом із тим, із точки зору досвідченого викладача багато ситуацій будуть наближено однакові, а всі можливі стани при вивченні певного елементу знань об'єктом навчання можуть описуватись набором типових ситуацій, кожна з яких є сукупністю лінгвістичних значень показників.

Якщо в прикладі використати для оцінювання чітку чотирьохзначну лінгвістичну шкалу, виражену в термінах *"незадовільно", "задовільно", "добре", "відмінно"*, то кількість ситуацій зменшиться й дорівнюватиме $n=4\times4\times4\times4\times4=1024$.

Набір типових ситуацій досить повно описує стан об'єкта навчання за вибраними показниками, проте в них можуть не враховуватись інші фактори, які впливають на вибір методів навчальної діяльності. Наприклад, при оцінці рівня засвоєння матеріалу не враховується складність навчального матеріалу, рівень його представлення, рівень практичних навичок, час вивчення (у середині четверті, до канікул тощо). Тому вказівка "Перейти до вивчення наступного елементу знань" може прийматись не "завжди" при значенні "відмінно" в об'єкта навчання, а лише"майже завжди".

Поставимо у відповідність терміну "майже завжди" число 1, терміну "часто" – 0.7, терміну "рідко"– 0.4, терміну "ніколи" - 0. Нехай у тесті виконано 18 операцій з 20, тоді з графіка функції належності видно, що нечітка оцінка об'єкта навчання для значення змінної "*Розуміння*" дорівнює

$\mu_{C(\text{"незадовільно"})}(18) = 0$, $\mu_{C(\text{"задовільно"})}(18) = 0.$, $\mu_{C(\text{"добре"})}(18) = 0.7$, $\mu_{C(\text{"відмінно"})}(18) = 0.4$,

тобто

$\tilde{\varphi}(u)_{\text{розуміння}} = \{<0\,|\,\text{"незадовільно"}>; <0\,|\,\text{"задовільно"}>; <0.7\,|\,\text{"добре"}>; <0.4\,|\,\text{"відмінно"}>\}$.

Оскільки результатом оцінювання за дидактичними показниками знань об'єкту навчання є нечітка оцінка, то сформулюємо означення 1 по-іншому.

Означення 2. Ситуацією при вивченні об'єктом навчання певного елемента знань називатимемо множину нечітких оцінок значень дидактичних показників в об'єкта навчання.

Прикладом опису рівня знань при визначенні засвоєння навчального матеріалу може бути наступний. Нехай учень виконав 18 з 20 тестів на впізнавання навчального матеріалу, 13 з 20 - на відображення, 8 з 20 - на розуміння, 4 – на усвідомлення, 2 - на творчість. Вважатимемо для спрощення, що функції належності однакові для всіх нечітких змінних. Тоді ситуація, яка описує рівень знань об'єкта навчання запишеться так:

$$\tilde{s}(u) = \Big\langle\{<\tilde{\varphi}(u)_{\text{Розуміння}}\,|\,\text{"Розуміння"}>, <\tilde{\varphi}(u)_{\text{Впізнавання}}\,|\,\text{"Впізнавання"}>,$$
$$<\tilde{\varphi}(u)_{\text{Відображення}}\,|\,\text{"Відображення"}>, <\tilde{\varphi}(u)_{\text{Застосування}}\,|\,\text{"Застосування"}>,$$
$$\tilde{\varphi}(u)_{\text{Творчість}}\,|\,\text{"Творчість"}> \Big\rangle,$$ де

$\tilde{\varphi}(u)_{\alpha}$ – визначається за допомогою відповідних функцій належності.

$\tilde{\varphi}(u)_{\text{розуміння}} = \{<0.1\,|\,\text{"незадовільно"}>; <0.95\,|\,\text{"задовільно"}>; <0\,|\,\text{"добре"}>; <0\,|\,\text{"відмінно"}>\}$,

$\tilde{\varphi}(u)_{\text{впізнавання}} = \{<0\,|\,\text{"незадовільно"}>; <0\,|\,\text{"задовільно"}>; <0.7\,|\,\text{"добре"}>; <0.4\,|\,\text{"відмінно"}>\}$,

$\tilde{\varphi}(u)_{\text{відображення}} = \{<0\,|\,\text{"незадовільно"}>; <0.55\,|\,\text{"задовільно"}>; <0.8\,|\,\text{"добре"}>; <0\,|\,\text{"відмінно"}>\}$,

$\tilde{\varphi}(u)_{\text{застосування}} = \{<0.35\,|\,\text{"незадовільно"}>; <0\,|\,\text{"задовільно"}>; <0\,|\,\text{"добре"}>; <0\,|\,\text{"відмінно"}>\}$,

$\tilde{\varphi}(u)_{\text{творчысть}} = \{<0.45\,|\,\text{"незадовільно"}>; <0\,|\,\text{"задовільно"}>; <0\,|\,\text{"добре"}>; <0\,|\,\text{"відмінно"}>\}$.

Аналізуючи ситуацію можна припустити, що об'єкт навчання хоча й володіє навчальним матеріалом на репродуктивному рівні, проте не повністю його розуміє і не вміє використовувати його на практиці. Керуючим рішенням у такій ситуації може бути наступне – "Збільшити кількість часу на виконання практичних вправ; під час їх виконання акцентувати увагу на відповідних теоретичних питаннях".

Нечітке включення ситуацій

Припустимо, що існує набір типових ситуацій $S = \{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, ..., \tilde{s}_N\}$. За міру близькості ситуації $\tilde{s}_0$ до ситуації $\tilde{s}_i \in S (i \in K = \{1,2,...,N\})$ можна прийняти ступінь включення ситуації $\tilde{s}_0$ у ситуацію $\tilde{s}_i$, ступінь рівності $\tilde{s}_0$ та $\tilde{s}_i$; ступінь нечіткої спільності ситуацій, а також інші [1].

Нехай $\tilde{s}_i = \{<\mu_{si}(\beta)\,|\,\beta>\}, \tilde{s}_j = \{<\mu_{sj}(\beta)\,|\,\beta>\}$ - деякі нечіткі ситуації, тоді, ступінь включення ν ситуації $\tilde{s}_i$ у ситуацію $\tilde{s}_j$ визначається виразом

$$\nu(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = \underset{\beta \in B}{\&}\, \nu(\mu_{si}(\beta), \mu_{sj}(\beta)).$$

Вважатимемо, що ситуація $\tilde{s}_i$ включається в ситуацію $\tilde{s}_j$, якщо $\nu \geq t_{inc}$, де $t_{inc} \in [0{,}6;1]$. Нехай для об'єкта u в процесі тестування отримано ситуацію $\tilde{s}'(u)$, де

$$\tilde{\varphi}'(u)_{\text{розуміння}} = \{<0.1\,|\,"\textit{незадовільно}">;<0.7\,|\,"\textit{задовільно}">;<0.2\,|\,"\textit{добре}">;<0\,|\,"\textit{відмінно}">\},$$

$$\tilde{\varphi}'(u)_{\text{впізнавання}} = \{<0\,|\,"\textit{незадовільно}">;<0.3\,|\,"\textit{задовільно}">;<0.6\,|\,"\textit{добре}">;<0.8\,|\,"\textit{відмінно}">\},$$

$$\tilde{\varphi}'(u)_{\text{відображення}} = \{<0\,|\,"\textit{незадовільно}">;<0.3\,|\,"\textit{задовільно}">;<0.8\,|\,"\textit{добре}">;<0.3\,|\,"\textit{відмінно}">\},$$

$$\tilde{\varphi}'(u)_{\textit{застосування}} = \{<0.25\,|\,"\textit{незадовільно}">;<0\,|\,"\textit{задовільно}">;<0\,|\,"\textit{добре}">;<0\,|\,"\textit{відмінно}">\},$$

$$\tilde{\varphi}'(u)_{\textit{творчысть}} = \{<0.7\,|\,"\textit{незадовільно}">;<0\,|\,"\textit{задовільно}">;<0\,|\,"\textit{добре}">;<0\,|\,"\textit{відмінно}">\}.$$

Тоді для ситуацій $\tilde{s}(u)$ (розглянутої у першому прикладі) та $\tilde{s}'(u)$, отримуємо

$$\nu(\mu_s("\textit{Розуміння}"), \mu_{s'}("\textit{Розуміння}")) =$$
$$= (0.1 \to 0.1)\,\&\,(0.95 \to 0.7)\,\&\,(0 \to 0.2)\,\&\,(0 \to 0) = 0.9\,\&\,0.7\,\&\,1\,\&\,1 = 0.7;$$

$$\nu(\mu_s("\textit{Впізнавання}"), \mu_{s'}("\textit{Впізнавання}")) =$$
$$= (0 \to 0)\,\&\,(0 \to 0.3)\,\&\,(0.7 \to 0.6)\,\&\,(0.4 \to 0.8) = 1\,\&\,0.7\,\&\,0.6\,\&\,0.8 = 0.6;$$

$$\nu(\mu_s("\textit{Відображення}"), \mu_{s'}("\textit{Відображення}")) =$$
$$= (0 \to 0)\,\&\,(0.55 \to 0.3)\,\&\,(0.8 \to 0.8)\,\&\,(0 \to 0.3) = 1\,\&\,0.7\,\&\,0.8\,\&\,0.7 = 0.7;$$

$$\nu(\mu_s("\textit{Застосування}"), \mu_{s'}("\textit{Застосування}")) =$$
$$= (0.35 \to 0.25)\,\&\,(0 \to 0)\,\&\,(0 \to 0)\,\&\,(0 \to 0) = 0.75\,\&\,1\,\&\,1\,\&\,1 = 0.75;$$

$$\nu(\mu_s("\textit{Творчість}"), \mu_{s'}("\textit{Творчість}")) =$$
$$= (0.45 \to 0.7)\,\&\,(0 \to 0)\,\&\,(0 \to 0)\,\&\,(0 \to 0) = 0.7\,\&\,1\,\&\,1\,\&\,1 = 0.7.$$

Отже, $\nu(\tilde{s}, \tilde{s}') = 0.7\,\&\,0.6\,\&\,0.7\,\&\,0.75\,\&\,0.7 = 0.6$; умова $\nu \geq t_{inc}$ виконується, ситуація $\tilde{s}$ включається в ситуацію $\tilde{s}'$.

Порогове значення t_{inc} обмежує допустиму ступінь достовірності включення ситуацій. Чим вище t_{inc}, тим вища достовірність твердження про про включення однієї ситуації в іншу. Проте, якщо ступінь достовірності опису самої ситуації нижчий порогового, то, відповідно до [1] не можна з високою ступінню достовірності стверджувати, що одна ситуація включається в іншу. Ступінь достовірності опису ситуації вважають низьким, а саму ситуацію погано визначеною, якщо нечіткі значення хоча б одного показника $\beta_л$ містять терми, із ступінню належності більшою 1-t_{inc}, та меншою t_{inc} ,. Ситуація $\tilde{s}$ є погано визначеною, так як для терма "задовільно" показника "Відображення" ступінь належності дорівнює $0.55 \in (1 - t_{inc}, t_{inc})$.

В роботі [1] показано, що нечітке відношення $\tilde{\delta} = (S, \tilde{F})$, де $\tilde{F} = \{<\nu(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j)\,|<\tilde{s}_i, \tilde{s}_j>>\}$, при відсутності в множині S погано визначених ситуацій, є відношенням нечіткого нестрогого порядку. Це дозволяє побудувати на множині S ієрархію типових ситуацій. Якщо ситуації зобразити вершинами графа, а напрямленими дугами з'єднати ті з них, які пов'язані відношенням нестрого включення, то після виключення з графа транзитивних та рефлексивних дуг отримуємо діаграму Хассе [4]. Вершини графа розміщують за рівнями. На першому рівні ієрархії розміщуються вершини, із яких не виходить жодної дуги. На другому рівні розміщують вершини, із яких виходять дуги, інцидентні лише вершинам першого рівня. На деякому i-му ($i \le n$) рівні розміщуються вершини, із яких виходять дуги інцидентні вершинам, розміщеним на рівнях з першого по i-й.

Набір типових ситуацій можна використати для пошуку ситуації найбільш близької до ситуації $\tilde{s}$ таким чином. Визначається ситуація $\tilde{s}_l$ верхнього рівня, в яку нечітко включається $\tilde{s}$. Ситуація $\tilde{s}_l$ приймається рівною $\tilde{s}$. Здійснюється перехід до ситуацій, розміщених на нижчих рівнях ієрархії та суміжних з $\tilde{s}_l$. Серед них визначається ситуація $\tilde{s}_k$, в яку включається $\tilde{s}$. Якщо вона існує, то приймається $\tilde{s}$ рівною $\tilde{s}_k$ і пошук продовжується. Надалі розглядаються ситуації нижчих по відношенню до другого, рівнів ієрархії і т.д.. Пошук припиняється, якщо:

на деякому рівні ієрархії в ситуацію $\tilde{s}_i$ не включається жодна ситуація множини S;

для будь-якої ситуації $\tilde{s}_j \subseteq \tilde{s}_i$, виконується умова $\tilde{s} \not\subseteq \tilde{s}_j$.

Нечітка рівність ситуацій

Відповідно до [1], ситуації $\tilde{s}_i$ та $\tilde{s}_j$ будемо вважати рівними та позначати $\tilde{s}_i \approx \tilde{s}_j$, якщо $\mu(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) \ge t$, де $t \in [0.6;1]$ - деякий поріг, а

$$\mu(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = \nu(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) \,\&\, \nu(\tilde{s}_j, \tilde{s}_i) = = \underset{\beta \in B}{\&} \mu(\mu_{si}(\beta), \mu_{sj}(\beta)).$$

Для ситуацій $\tilde{s}(u)$(розглянутої у першому прикладі) та $\tilde{s}'(u)$, отримуємо

$$\mu(\mu_s(\text{"}\textit{Розуміння}\text{"}), \mu_{s'}(\text{"}\textit{Розуміння}\text{"})) =$$
$$= (0.1 \leftrightarrow 0.1) \,\&\, (0.95 \leftrightarrow 0.7) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0.2) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0) = 0.9 \,\&\, 0.7 \,\&\, 0.8 \,\&\, 1 = 0.7;$$
$$\mu(\mu_s(\text{"}\textit{Впізнавання}\text{"}), \mu_{s'}(\text{"}\textit{Впізнавання}\text{"})) =$$
$$= (0 \leftrightarrow 0) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0.3) \,\&\, (0.7 \leftrightarrow 0.6) \,\&\, (0.4 \leftrightarrow 0.8) = 1 \,\&\, 0.7 \,\&\, 0.6 \,\&\, 0.4 = 0.4;$$
$$\mu(\mu_s(\text{"}\textit{Відображення}\text{"}), \mu_{s'}(\text{"}\textit{Відображення}\text{"})) =$$
$$= (0 \leftrightarrow 0) \,\&\, (0.55 \leftrightarrow 0.3) \,\&\, (0.8 \leftrightarrow 0.8) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0.3) = 1 \,\&\, 0.45 \,\&\, 0.8 \,\&\, 0.7 = 0.45;$$
$$\mu(\mu_s(\text{"}\textit{Застосування}\text{"}), \mu_{s'}(\text{"}\textit{Застосування}\text{"})) =$$
$$= (0.35 \leftrightarrow 0.25) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0) = 0.65 \,\&\, 1 \,\&\, 1 \,\&\, 1 = 0.65;$$
$$\mu(\mu_s(\text{"}\textit{Творчість}\text{"}), \mu_{s'}(\text{"}\textit{Творчість}\text{"})) =$$
$$= (0.45 \leftrightarrow 0.7) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0) \,\&\, (0 \leftrightarrow 0) = 0.45 \,\&\, 1 \,\&\, 1 \,\&\, 1 = 0.45.$$

Отже, $\mu(\tilde{s}, \tilde{s}') = 0.7 \,\&\, 0.4 \,\&\, 0.45 \,\&\, 0.65 \,\&\, 0.45 = 0.4$; умова $\mu \ge t$ не виконується, ситуація $\tilde{s}$ нерівна ситуації $\tilde{s}'$. Якби при оцінюванні використовувались лише показники "Розуміння" та "Застосування", то ситуації були б рівними.

Позначимо $\Delta_1^t = [0;1-t]$, $\Delta_2^t = [t;1]$, тоді

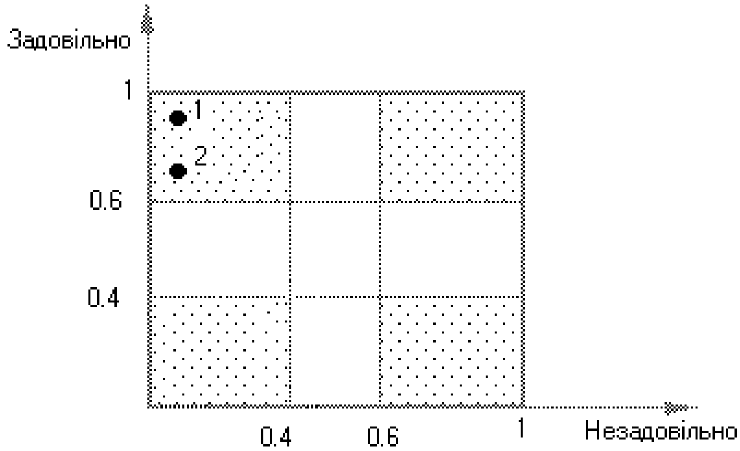
$D_t = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \forall 1 \le i \le n : x_i \in \Delta_1^t \vee x_i \in \Delta_2^t\}$ - гіперкуб у n-вимірному просторі. Очевидно, що кількість гіперкубів, яка задається відрізками Δ_1^t та Δ_2^t, дорівнює $A_n^2 = 2^n$. Позначимо, $D_t^* = \{D_t^i \mid 1 \le i \le 2^n\}$ - множину гіперкубів.

Нехай назви осей координат простору є значеннями лінгвістичної змінної $\mathrm{A}(\beta)$ =*{"незадовільно","задовільно","добре","відмінно"}*, а координатами точок простору є їх степені належності у певного об'єкта навчання.

Отже, кожній нечіткій оцінці об'єкта навчання за певним дидактичним показником відповідає точка 4-вимірного простору. Можна довести, що нечіткі оцінки показників різних об'єктів рівні, якщо точки, що їм відповідають знаходять в одному гіперкубі.

Можна показати також, що відношення "бути нечітко рівними" є відношенням нечіткої еквівалентності, а, отже, множина всіх нечітких оцінок розбивається на класи еквівалентності, якими і є побудовані гіперкуби.

Наступний малюнок ілюструє побудову класів еквівалентності для показника "Розуміння". Нехай, для спрощення, множина $\mathrm{A}(\beta)$ містить лише два елементи *{"незадовільно","задовільно"}*, тоді класи еквівалентності зображаються заштрихованими прямокутниками



Точкам 1 та 2 відповідають нечіткі оцінки

$$\tilde{\varphi}(u)_{\text{розуміння}} = \{<0.1 \mid \text{"}\textit{незадовільно}\text{"}>; <0.95 \mid \text{"}\textit{задовільно}\text{"}>\},$$

$$\tilde{\varphi}(u')_{\text{розуміння}} = \{<0.1 \mid \text{"}\textit{незадовільно}\text{"}>; <0.7 \mid \text{"}\textit{задовільно}\text{"}>\}$$

об'єктів u та u'.

Для оцінки значень кожного показника використовується 4 терми, тому для кожного показника існує $2^4 = 16$ класів еквівалентності. Всіх показників 5, тому загальна кількість різних ситуацій дорівнює $16^5 = 1048576$.

Множина нечітких ситуацій теж розбивається на класи еквівалентності, аналогічно тому як на класи розбиваються множини нечітких оцінок. Всі ситуації які входять до одного класу вважаються нечітко рівними.

Якщо врахувати залежності між дидактичними показниками, здійснити декомпозицію ситуацій, об'єднати деякі різні ситуації, то кількість типових можна значно зменшити. Обмежений набір типових нечітких ситуацій може описувати велику кількість станів об'єкта навчання.

Процес керування навчанням може бути представлений таким алгоритмом:

оцінка рівня знань в об'єкта навчання (формування нечіткої ситуації);

пошук типової ситуації, яка близька до даної, за певним критерієм;

знаходження в керуючій таблиці вказівок, пов'язаних із типовою та повідомлення їх об'єктові навчання.

У прикладі розглядались лише показники рівня засвоєння знань. Очевидно, що розглянуту процедуру пошуку нечіткої оцінки можна використати і для інших дидактичних показників.

Висновок

Очевидно, що підхід до оцінювання знань на основі нечітких множин не може бути безпосередньо використаний для виставлення оцінок учням. Хоча й більшість вчителів при оцінюванні знань, міркують досить часто нечіткими категоріями, проте оцінка, яку вони висталяють завжди чітка. Кінцевим кроком будь-якого способу оцінювання є перетворення нечіткої оцінки в чітку.

Запропонований підхід до оцінювання на основі нечітких оцінок не претендує на заміну традиційних методів. Нечіткі оцінки пропонується використовувати лише як інструментом, що дозволяє наближено формалізувати як сам процес оцінювання, так і поняття вплив вчителя на об'єкт навчання.

Запропонований алгоритм пошуку керуючих вказівок пропонується використовувати в автоматизованих дорадчих дидактичних системах.

Література

1.Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой.-М.:Наука.Гл.ред.физ.-мат.лит.,1990.-272с.

2.Беспалько В.П. Основы теории педагогических систем. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1977. 303с.

3.Обработка нечеткой информации в системах принятия решений/ А.Н. Борисов, А.В.Алексеев, Г.В.Меркурьева и др. – М.:Радио и связь, 1989.-304с.

4.Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. - М.:Наука.,1975.-477с.